

TÍCH PHÂN LẬP

Giả sử f là một hàm 2 biến xác định và liên tục trên miền hình chữ nhật đóng $R=[a,b]\times[c,d]$. Chúng ta ký hiệu $\int_c^d f(x,y)dy$ để chỉ khi x không thay đổi và $f(x,y)$ được lấy tích phân tương ứng với y từ $y=c$ đến $y=d$. Cách làm này được gọi là tích phân riêng tương ứng với y . Như thế ta có $\int_c^d f(x,y)dy$ là một số phụ thuộc vào x và do đó ta định nghĩa một hàm theo biến x như sau:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

Bây giờ lấy tích phân hàm A tương ứng với x từ $x=a$ đến $x=b$ ta có được:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Tích phân bên vế phải của phương trình [1] được gọi là tích phân lập. Khi mở các dấu móc chúng ta nhận được:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Tương tự ta cũng có:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

$$(a) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

$$(b) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

Giải.

(a) Xem x là hằng số ta có

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} x^2 \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2$$

Lấy tích phân cho hàm số $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ đối với x từ 0 đến 3

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y dy \right] dx = \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^3 = \frac{27}{2}$$

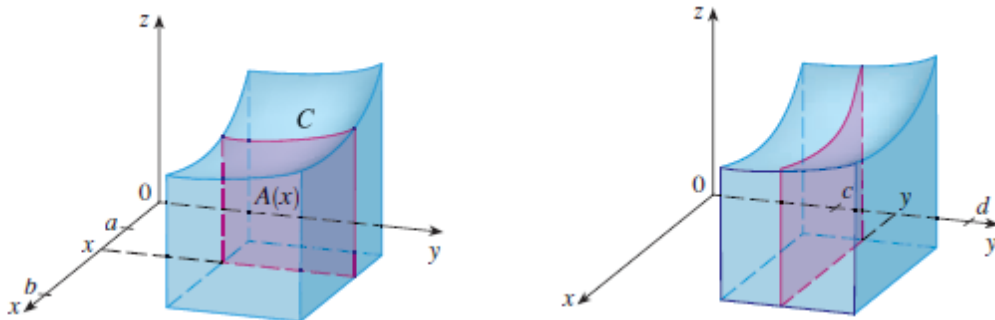
b) Lấy tích phân đối với x

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9 y dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{27}{2}$$

* **Định lý Fubini:** Nếu f là một hàm hai biến liên tục trên miền

$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ thì khi ấy ta có:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$



* **Nhận xét:** Từ định lý Fubini, ta có được kết quả sau:

Ví dụ 2 : Tính tích phân kép $\iint_R (x - 3y^2) dA$ trong đó

$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. So sánh với ví dụ 3 ở phần 2.1

Giải: C1 : Theo định lý Fubini

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx = \int_0^2 [xy - y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = -12 \end{aligned}$$

C2: Tiếp tục áp dụng định lý Fubini tuy nhiên lần này lấy tích phân với x trước ta có :

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2) dy = \left[2y - 2y^3 \right]_1^2 = -12 \end{aligned}$$

Ví dụ 3 : Tính giá trị của tích phân $\iint_R y \sin(xy) dA$ trong đó

$$R = [1, 2] \times [0, \pi]$$

Giải: C1 : lấy tích phân đối với x ta có

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy = \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

C2 : Nếu chúng ta đảo ngược thứ tự lấy tích phân ta có

$$\iint_R y \sin(xy) dA = \int_1^{2\pi} \int_0^{\pi} y \sin(xy) dy dx$$

Để tính tích phân trong ta áp dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\begin{aligned} u &= y & dv &= \sin(xy) dy \\ du &= dy & v &= -\frac{\cos(xy)}{x} \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} y \sin(xy) dy &= -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^{\pi} \cos(xy) dy \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2} \end{aligned}$$

Nếu lấy tích phân số hạng đầu bởi các phần với $u = -\frac{1}{x}$ và $dv = \pi \cos \pi x dx$, ta được

$$du = \frac{dx}{x^2}, \quad v = \sin \pi x \quad \text{và}$$

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} \right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x} - \int \frac{\sin \pi x}{x^2} dx$$

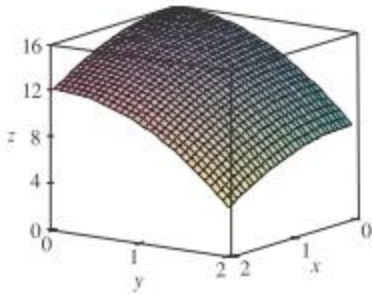
Vì thế

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_1^{2\pi} \int_0^{\pi} y \sin(xy) dy dx &= \left[-\frac{\sin \pi x}{x} \right]_1^{2\pi} \\ &= -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 4 : Tìm thể tích của vật thể S giới hạn trong elip paraboloid có phương trình $x^2 + 2y^2 + z = 16$ nằm trên hình vuông $R = [0, 2] \times [0, 2]$ (xem hình 5).



Theo định lý Fubini ta có:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 48 \end{aligned}$$

Trong trường hợp đặc biệt khi $f(x, y)$ có thể phân tích thành thừa số như là một phân hàm số của riêng x và một phân hàm số của riêng y thì tích phân kép có thể được biểu diễn bằng 1 dạng đơn giản riêng. Để xác định giả sử rằng $f(x, y) = g(x)h(y)$ và $R = [a, b] \times [c, d]$ theo định lý **Fubini** ta có

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{c \ a}^d \ b g(x)h(y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) dx \right] dy$$

Trong tích phân trong y là hằng số và $h(y)$ là hằng số do đó ta có thể viết thành

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) dx \right] dy &= \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \right] dy \\ &= \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \end{aligned}$$

Khi $\int_a^b g(x) dx$ là 1 hằng số. Do đó trong trường hợp này tích phân kép của hàm f có thể viết như là tích của hai tích phân đơn

$$\iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \quad \text{Trong đó } R = [a, b] \times [c, d]$$

Ví dụ 5 : Nếu $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thì theo phương trình 5 ta có

$$\begin{aligned} \iint_R \sin x \cos y dA &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy \\ &= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\sin y]_0^{\pi/2} = 1.1 = 1 \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân lặp:

(a). $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy$

(b). $\int_{-1}^4 \int_2^1 (x^2 + y^2) dy dx$

(c). $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y dy dx$

(d). $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y}) dx dy$

2. Tính các tích phân 2 lớp:

(a). $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4) dA$ với $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$.

(b). $\iint_R \cos(x + 2y) dA$ với $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$.

(c). $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$ với $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$.

(d). $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2} dA$ với $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.