

### Một số phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n.

▪ Phương pháp 1:  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$

Trong đó :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ , với  $M_{ij}$  là ma trận con của ma trận A ứng với phần tử  $a_{ij}$ .

*Ví dụ :*

Cho  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\det(A) = 5 \neq 0$  nên A có ma trận nghịch đảo.

Ta tính được:  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Vậy ma trận nghịch đảo của A được xác định:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

- Phương pháp 2:
  - Lập ma trận khối  $(A|I_n)$ .
  - Dùng các phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên các hàng của ma trận

$(A|I_n)$ , biến đổi ma trận đó về dạng  $(I_n|B)$ . Khi đó,  $B = A^{-1}$ .

Sơ đồ minh họa :

$$(A|I_n) = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{Phép biến đổi sơ cấp theo hàng}} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right]$$

$$\text{Khi ấy : } A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1: Tìm ma trận nghịch đảo của  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - h_1 \end{array}]{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} h_1 \rightarrow h_1 - h_3 \\ \rightarrow \\ h_2 \rightarrow h_2 + h_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{h_2 \rightarrow h_2 \frac{1}{5}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} h_1 \rightarrow h_1 + 3h_2 \\ \rightarrow \\ h_3 \rightarrow h_3 - 2h_2 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

$$\text{Vậy : } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$