KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

Định nghĩa:

Cho dãy số $\{u_n\}$, *Nếu chúng ta cộng tất cả các phần tử của dãy đó thì ta có tổng*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

thì tổng vô hạn này được gọi là là chuỗi vô hạn (hay chuỗi) và được ký hiệu là

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ hay \ \ \sum u_n.$$

u_n *gọi là số hạng tổng quát của chuỗi*

Tổng $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ *được gọi là tổng riêng thứ* n *của chuỗi.*

Định nghĩa

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *hữu hạn thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *được gọi là hội tụ và có tổng bằng* S *, lúc này ta viết* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ *còn ngược lại thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *được gọi là phân kỳ.*

Ví dụ:

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Ta thấy $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Do đó $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Chú ý: Cho chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots, \ a \neq 0.$$

Nếu $|q| < 1$ thì chuỗi hội tụ và tổng của nó là $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$.

Nếu $|q| \geq 1$ thì chuỗi cấp số nhân phân kỳ.

Định lý

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Nhận xét:

Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ : chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2019}+2}{n^{2019}+n+1}$ phân kỳ vì $\lim \frac{2n^{2019}+2}{n^{2019}+n+1} = 2 \neq 0$

Ví dụ : chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ vì $\lim(-1)^n$ không tồn tại

Chú ý: Điều ngược lại của định lý trên không đúng