BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI DUY TÂN

Khoa:	**Khoa học tự nhiên.**
Bộ môn:	**Toán**
Giảng viên:	**TS. Đặng Văn Cường**

TOÁN CAO CẤP A1

(Ví dụ và Bài tập)

Đà Nẵng - 2013

Chương 5

Lý thuyết chuỗi

5.1 Dãy số

Ví dụ 5.1.1. Một số dãy có thể xác định bằng việc cho một công thức đối với số hạng tổng quát. Trong các ví dụ sau chúng ta có ba cách biểu diễn của một dãy: thứ nhất là sử dụng ký hiệu đã biết, thứ hai là sử dụng công thức xác định, thứ ba là bằng cách viết ra các phần tử của dãy. Chú ý rằng n không nhất thiết phải bắt đầu từ 1.

$(a)\left\{\dfrac{\mathrm{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$	$a_n=\dfrac{n}{n+1}$	$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},...,\dfrac{n}{n+1},...\right\}$
$(b)\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$	$a_n=\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$	$\left\{-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{9},-\dfrac{4}{27},\dfrac{5}{81},...,\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$
$(c)\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$	$a_n=\sqrt{n-3}, n\geq 3$	$\left\{0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},...,\sqrt{n-3},...\right\}$
$(d)\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$	$a_n=\cos\dfrac{n\pi}{6}, n\geq 0$	$\left\{1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0,...,\cos\dfrac{n\pi}{6},...\right\}$

Ví dụ 5.1.2. Tìm công thức đối với số hạng tổng quát a_n của dãy sau

$$\left\{\frac{3}{5},-\frac{4}{25},\frac{5}{125},-\frac{6}{625},\frac{7}{3125},...\right\}$$

giả sử rằng mẫu các phần tử §ầu ở trên là liên tục.

Giải: Ta có

$$a_1=\frac{3}{5}\qquad a_2=-\frac{4}{25}\qquad a_3=\frac{5}{125}\qquad a_4=-\frac{6}{625}\qquad a_5=\frac{7}{3125}$$

Chú ý rằng tử số của các phân số bắt đầu với 3 và tăng 1 với các phần tử tiếp theo. Phần tử thứ hai có tử số là 4, phần tử thứ 3 có tử số là 5; trong trường hợp tổng quát phần tử thứ n có số hạng tổng quát $n+2$. Mẫu số là lũy thừa của 5 như vậy a_n có mẫu 5^n. Dấu của các phần tử là luân phiên từ dương sang âm, như vậy chúng ta cần tích với một lũy thừa của -1. Trong ví dụ 1 (b) nhân tố $(-1)^n$ có nghĩa chúng ta bắt đầu từ một phần tử âm. ở đây chúng ta muốn bắt đầu bằng phần tử âm nên chúng ta sử dụng $(-1)^{n-1}$ hoặc $(-1)^{n+1}$. Như vậy

$$a_n = (-1)^{n-1}\,\frac{n+2}{5^n}$$

Ví dụ 5.1.3. Xét một số dãy không có công thức xác đinh số hạng tổng quát đơn giản.

1. Dãy $\{p_n\}$, với $p_n$là dân số thế giới vào tháng một năm thứ n.

2. Nếu chúng ta đặt a_n là số hạng thập phân thứ n của số e, khi đó $\{a_n\}$ là một dãy mà một số phần tử đầu tiên của nó là

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5...\}$$

3. Dãy Fibonacci $\{f_n\}$ được xác định bằng công thức truy hồi với các điều kiện

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$$

   Mỗi phần tử là tổng của hai phần tử trước đó. Một vài phần tử đầu của dãy là

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$$

   Dãy này được biết đến vào thế kỷ thứ 13 của một nhà toán học người ý khi ông giải bài toán sinh sản của loài thỏ.

Ví dụ 5.1.4. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.
Giải: Chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất của n xuất hiện trong mẫu thức và sau đó sử dụng quy tắc giới hạn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Ví dụ 5.1.5. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Giải: Chú ý rằng cả tử và mẫu dần tới vô cùng khi n dần tới vô cùng. Chúng ta không thể áp dụng quy tắc L'Hospital trực tiếp vì nó không áp dụng được với dãy mà chỉ có thể áp dụng cho một hàm số biến số thực. Tuy nhiên chúng ta có thể áp dụng được quy tắc L'Hospital đối với hàm thay thế $f(x) = (\ln x)/x$ và nhận được

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Chính vì vậy, bằng Định lí **??** chúng ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Ví dụ 5.1.6. Tính giá trị $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nếu nó tồn tại.
Giải:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ví dụ 5.1.7. Xác định dãy $a_n = (-1)^n$ hội tụ hay phân kỳ.
Giải: Xét hai dãy con của dãy đã cho tương ứng với dãy các chỉ số chẵn và dãy các chỉ số lẻ,

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, \qquad a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$$

nên dãy đã cho phân kỳ.

Ví dụ 5.1.8. Với giá trị nào của r thì dãy $\{r^n\}$hội tụ?

Giải: Chúng ta biết rằng $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ với $a > 1$ và $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ với $0 < a < 1$. Như vậy, đặt a = r và sử dụng Định lý **??**, chúng ta có

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty \text{ nếu } \ r > 1 \\ 0 \ \text{ nếu } \ 0 < r < 1 \end{cases}$$

đối với trường hợp r = 1 và r = 0 chúng ta có

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{và} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Nếu $-1 < r < 0$ thì $0 < |r| < 1$ vậy nên

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

Và như vậy bằng Định lý **??** ta có $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Nếu $r \leq -1$, thì dãy bằng cách xác định dãy con các chỉ số lẻ và dãy con các chỉ số chẵn, ta chỉ ra hai dãy con hội tụ về hai giá trị khác nhau, suy ra dãy đã cho phân kỳ.

Ví dụ 5.1.9. Dãy $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$ là giảm vì

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

Và như vậy $a_n > a_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 5.1.10. Chỉ ra rằng dãy $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ giảm.

Giải 1: Chúng ta phải chỉ ra rằng $a_{n+1} < a_n$, nghĩa là

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Bất đẳng thức này được biến đổi tương đương bằng cách nhân chéo

$$\begin{aligned} &\tfrac{n+1}{(n+1)^2+1} < \tfrac{n}{n^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)\left(n^2+1\right) < n\left[(n+1)^2+1\right] \\ &\Leftrightarrow \quad n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\Leftrightarrow 1 < n^2+n \end{aligned}$$

từ $n \geq 1$, chúng ta biết rằng bất đẳng thức $n^2+n > 1$ đúng. Như vậy $a_{n+1} < a_n$và như vậy $\{a_n\}$ giảm.

Giải 2: Xét hàm $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} < 1 \qquad \text{với } x^2 > 1$$

Như vậy f là hàm giảm trên $(0, \infty)$ và như vậy $f(n) > f(n+1)$. Như vậy $\{a_n\}$ là dãy giảm.

Ví dụ 5.1.11. Khảo sát dãy $\{a_n\}$được xác đinh bởi công thức truy hồi

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6) \qquad vi\ n = 1, 2, 3, ...$$

Giải: Trước hết ta tính một số phần tử đầu tiên của dãy

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4 & a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5 \\ a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5.5 & a_5 = 5.75 & a_6 = 5.875 \\ a_7 = 5.9375 & a_8 = 5.96875 & a_9 = 5.984375 \end{array}$$

Các phần tử này làm cơ sở cho chúng ta dự đoán rằng dãy tăng và các phần tử dần tới 6. để khẳng định dãy này tăng chúng ta sử dụng phương pháp toán học chỉ ra rằng $a_{n+1} > a_n$ với mọi $n \geq 1$. điều này đúng với n = 1 vì $a_2 = 4 > a_1$. Nếu chúng ta giả sử rằng nó đúng với n = k thì ta nhận được

$$a_{k+1} > a_k$$

Khi đó

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

Và

$$\frac{1}{2}\left(a_{k+1} + 6\right) > \frac{1}{2}\left(a_k + 6\right)$$

Vậy nên

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Chúng ta chỉ ra đươc $a_{n+1} > a_n$ với n = k + 1. Vậy nên theo phương pháp quy nạp bất đẳng thức đúng với mọi n. Tiếp theo chúng ta kiểm tra $\{a_n\}$ bị chặn bằng cách chỉ ra rằng $a_n < 6$ với mọi n (Dãy tăng nên nó có cận dưới $a_n \geq a_1 = 2$ với mọi n). Ta có $a_1 < 6$, như vậy khẳng định đúng với n = 1. Giả sử khẳng định đúng với n = k. Khi đó

$$a_k < 6$$

nên

$$a_k + 6 < 12$$

và

$$\frac{1}{2}\left(a_k + 6\right) < \frac{1}{2}.12 = 6$$

Vậy nên

$$a_{k+1} < 6$$

Theo phương pháp quy nạp ta có $a_n < 6$ với mọi n.

Vì dãy đã cho tăng và bị chặn nên theo định lí đơn điệu bị chặn nó có giới hạn. định lí không cho chúng ta biết giá trị của giới hạn. Nhưng chúng ta biết rằng $L = \lim_{n\to\infty} a_n$là tồn tại, chúng ta có thể sử dụng quan hệ truy hồi để viết

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + 6\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \frac{1}{2}\left(L + 6\right)$$

$a_n \to L$ nên $a_{n+1} \to L$ (khi $n \to \infty$ thì $n + 1 \to \infty$). Vậy nên chúng ta có $L = \frac{1}{2}\left(L + 6\right)$. Giải phương trình này với ẩn L chúng ta nhận được $L = 6$, như dự đoán của chúng ta.

Bài tập

1.

(a) Dãy là gì?

(b) ý nghĩa của công thức $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$ là gì?

(c) ý nghĩa của công thức $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ là gì?

2.

(a) Dãy như thế nào được gọi là hội tụ? Cho hai ví dụ.

(b) Dãy như thế nào được gọi là phân kỳ? Cho hai ví dụ.

3. Liệt kê một vài phần tử đầu tiên của dãy được xác định bởi

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Dãy đã cho có giới hạn hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn.

4. Liệt kê 10 phần tử đầu của dãy $\{\cos(n\pi)/3\}$. Dãy đã cho có tồn tại giới hạn hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn. Nếu không hãy giải thích tại sao.

5-8. Tìm một công thức đối với số hạng tổng quát a_ncủa dãy, giả sử mẫu các một vài phần tử đầu tiên liên tục.

5. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, ...\right\}$. 6. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, ...\right\}$

7. $\{2, 7, 12, 17, ...\}$. 8. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, ...\}$

9-32. Xác định các dãy dưới đây hội tụ hay phân kỳ, nếu hội tụ hãy tìm giới hạn

9. $a_n = \dfrac{3+n^2}{n+n^2}$ 10. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$ 11. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ 12. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

13. $a_n = \dfrac{(n+2)!}{n!}$ 14. $a_n = \dfrac{n}{1+\sqrt{n}}$ 15. $\{\cos n\pi\}$ 16. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$

17. $\left\{\dfrac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\right\}$ 18. $a_n = \cos(2/n)$ 19. $a_n = n2^{-n}$ 20. $\{\arctan 2n\}$

21. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$ 22. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ 23. $a_n = \dfrac{n\cos n}{n}$ 24. $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

25. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$ 26. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ 27. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ 28. $a_n = 2 + (-2/\pi)^n$

29. $\left\{\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\}$ 30. $\left\{\arctan\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right\}$

31. $\{0, 1, 0, 0, 1, 000, 1, ...\}$

32. $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1)$

33. Nếu 1000USD dùng để mua 6% cổ phần tồn đọng, thanh toán hàng năm, khi đó đến năm thứ n tổng số tiền đầu tư có được là $a_n = 1000\,(1.06)^n$ USD.

(a) Tìm năm phần tử đầu tiên của dãy $\{a_n\}$.

(b) Dãy đã cho hội tụ hay phân kỳ? Giải thích.

34.

(a) Xác định xem dãy được xác định như sau là hội tụ hay phân kỳ

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = 4 - a_n,\ \forall n \geq 1$$

(b) điều gì xảy nếu phần tử đầu tiên $a_1 = 2$.

35.

(a) Fibonacci đặt ra bài toán sau: Giả sử thỏ sống vĩnh viễn và cứ mỗi tháng mỗi cặp thỏ sinh được một cặp mới, sau hai tháng cặp thỏ con này có khả năng sinh con. Nếu chúng ta bắt đầu với một cặp thỏ mới sinh hỏi số thỏ có được đến tháng thứ n? Chỉ ra rằng kết quả là f_n, với $\{f_n\}$ là dãy Fibonacci được xác định trong ví dụ 3(c).

(b) đặt $a_n = f_{n+1}/f_n$ và chỉ ra rằng $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Giả sử rằng $\{a_n\}$ hội hãy tìm giới hạn của nó.

36. Tìm giới hạn của dãy

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}, ...}}\right\}$$

37-40. Xác định dãy đã cho là tăng, giảm hay không đơn điệu. Dãy có bị chặn hay không?

$$37.\ a_n = \frac{1}{2n+3} \qquad 38.\ a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$$
$$39.\ a_n = \cos(n\pi/2) \qquad 40.\ a_n + \frac{1}{n}$$

41. Giả sử bạn biết $\{a_n\}$ là một dãy tăng và các phần tử nằm giữa hai số 5 và 8. Giải thích tại sao dãy có giới hạn. Bạn có thể nói gì về giá trị của giới hạn.

42. Dãy $\{a_n\}$ xác định bới $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Bằng phương pháp quy nạp hoặc một cách nào đó chỉ ra rằng $\{a_n\}$là một dãy tăng và bị chặn trên bởi 3. áp dụng định lí đơn điệu bị chặn để chỉ ra $\lim_{n\to\infty} a_n$ tồn tại.

(b) Tìm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

43. Chỉ ra rằng dãy

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

Tăng và $a_n < 3$ với mọi n. Suy ra dãy $\{a_n\}$hội tụ và tìm giới hạn của nó.
44. Chỉ ra rằng dãy $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ thỏa mãn $0 < a_n \leq 2$ và là dãy giảm. Suy ra dãy đã cho hội tụ và tìm giới hạn của nó.
45.
(a) Cho $a_1 = a, a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), ..., a_{n+1} = f(a_n)$ với f là một hàm liên tục. Chỉ ra rằng nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ thì $f(L) = L$.
(b) Minh họa (a) bằng cách lấy $f(x) = \cos x, a_1 = 1$ và ước lượng giá trị của Lvới năm chữ số thập phân.
46. Số lượng của một cư dân cá không bị quấy rầy có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

với p_n là số lượng cá sau n năm và a, b là các hằng số dương, nó phụ thuộc vào loài và điều kiện sống. Giả sử rằng số lượng cá trong năm 0 là $p_0 > 0$.
(a) Chỉ ra rằng nếu $\{p_n\}$ hội tụ thì giá trị giới hạn chỉ có thể là 0 và $b - a$.
(b) Chỉ ra rằng $p_{n+1} < (b/a)\, p_n$.
(c) Sử dụng phần (a) chỉ ra rằng nếu a > b, thì $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ nói cách khác là cá chết dần.
(d) Bây giờ giả sử rằng $a < b$. Chỉ ra rằng nếu $p_0 < b - a$ thì $\{p_n\}$tăng và $0 < p_n < b - a$. đồng thời chỉ ra rằng nếu $p_0 > b - a$ thì $\{p_n\}$ là dãy giảm và $p_n > b - a$. Kết luận rằng, nếu $a < b$ thì $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.
47. Một dãy được xác định truy hồi bởi công thức

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

Tìm tám phần tử đầu của dãy $\{a_n\}$. Bạn chú ý điều gì về các phần tử lẻ và các phần tử chẵn? Bằng cách xét riêng biệt các phần tử lẻ và phần tử chẵn chỉ ra rằng $\{a_n\}$ hội tụ và suy ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

điều này cho chúng ta một khai triển phân số liên tục

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+...}}$$

5.2 Chuỗi số

5.2.1 Khái niệm chuỗi số - Chuỗi hội tụ, chuỗi phân kỳ

Ví dụ 5.2.1. Một ví dụ quan trọng của chuỗi số là chuỗi cấp số nhân

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \qquad a \neq 0$$

mỗi phần tử nhận được bằng cách nhân với phần tử trước nó một thành phần tỷ lệ r.

Nếu r = 1 thì $s_n = a + a + a + ...a = na \to \pm\infty$. Nên giới hạn $\lim_{n\to\infty} s_n$ không tồn tại, chuỗi cấp số nhân là phân kỳ trong trường hợp này.

Nếu $r \neq 1$, ta có

$$s_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

Và

$$rs_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n$$

trừ vế theo vế hai phương trình này chúng ta nhận được

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} \tag{5.1}$$

Nếu $-1 < r < 1$, chúng ta biết được từ Định lý **??** rằng $r^n \to 0$, nên

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - n}$$

Như vậy, khi $|r| < 1$ chuỗi cấp số nhân hội tụ và tổng của nó là $a/\left(1 - r\right)$. Nếu $r \leq -1$ hoặc $r > 1$, bằng Định lý **??** dãy $\{r_n\}$ phân kỳ và chính vì vậy mà bằng phương trình (5.1) giới hạn $\lim_{n\to\infty} s_n$không tồn tại. Như vậy chuỗi cấp số nhân phân kỳ trong các trường hợp này.

Ví dụ 5.2.2. Tìm tổng của chuỗi cấp số nhân

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ...$$

Giải: Phần tử thứ nhất a = 5, công sai $r = -3/2$. Từ giả thiết $|r| = 3/2 < 1$, từ Định lý **??** suy ra chuỗi hội tụ và tổng của nó là

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ... = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = 3$$

Ví dụ 5.2.3. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ hội tụ hay phân kỳ?

Giải: Viết lại số hạng thứ n của chuỗi dưới dạng ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^2\right)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4.\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Chúng ta nhận thấy rằng, chuỗi đã cho là chuỗi cấp số nhân với a = 4 và r = 4/3. Với r = 4/3 và từ Định lý **??** suy ra chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.2.4. Viết số $2.3\overline{17} = 2.317171717...$ bằng phân số các số nguyên.

Giải:

$$2.3171717... = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + ...$$

Sau phần tử thứ nhấ chúng ta có một chuỗi cấp số nhân với $a = 17/10^3$ và $r = 1/10^2$. Vậy nên

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

Ví dụ 5.2.5. Tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với |x|< 1.

Giải: Chú ý rằng chuỗi này bắt đầu với n = 0 và như vậy phần tử thứ nhất của chuỗi là $x^0 = 1$ (Với các chuỗi, chúng ta quy ước răng $x^0 = 1$ ngay cả khi x = 0). Vậy nên

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

đây là chuỗi lũy thừa với a = 1 và r = x. Từ giả thiết $|r| = |x| < 1$ chuỗi đã cho hội tụ và từ Định lý **??** chúng ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{5.2}$$

Ví dụ 5.2.6. Chỉ ra rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và tìm tổng của chuỗi.

Giải: Đây không phải là chuỗi cấp số nhân, tuy nhiên chúng ta có thể quay lại định nghĩa chuỗi hội tụ và tính các tổng riêng.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

Chúng ta có thể đơn giản hóa biểu diễn này nếu chúng ta sử dụng phân tích các phân thức riêng

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Như vậy ta có

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \quad = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Và khi đó

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Vậy nên chúng ta nhận được chuỗi đã cho hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

5.2.2 Tính chất của chuỗi số - Tiêu chuẩn phân kỳ

Ví dụ 5.2.7. Chỉ ra rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ phân kỳ.

Giải:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Vậy nên bằng tiêu chuẩn phân kỳ suy ra chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 5.2.8. Chỉ ra rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ phân kỳ.

Giải: Vì dãy $a_n = (-1)^n$ không tồn tại giới hạn (Xem Ví dụ 5.1.7) nên theo tiêu chuẩn phân kỳ chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 5.2.9. Tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$.

Giải: Chuỗi $\sum 1/2^n$ là chuỗi cấp số nhân với $a = 1/2$ và $r = 1/2$, vậy nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Trong Ví dụ 5.2.6 chúng ta tìm được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1$$

Vậy nên chuỗi đã cho hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n\,(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3.1 + 1 = 4$$

BÀI TẬP

(a) Sự khác nhau giữa một dãy và một chuỗi?

(b) Chuỗi như thế nào được gọi là hội tụ? Như thế nào được gọi là phân kỳ?

2. Giải thích ý nghĩa của việc phát biểu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3-8. Nếu chuỗi hội tụ hãy tính tổng. Nếu chuỗi phân kỳ hãy giải thích.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan n$

6. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{n}^{1.5}} - \frac{1}{(n+1)^{1.5}} \right)$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}$ 8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)}$

9. Cho $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.

(a) Xác định dãy $\{a_n\}$ hội tụ hay không.

(b) Xác định $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$hội tụ hay không.

10.

(a) Giải thích sự giống nhau giữa $\sum_{i=1}^{n} a_i$ và $\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} a_j$.

(b) Giải thích sự khác nhau giữa $\sum_{i=1}^{n} a_i$ và $\sum_{i=1}^{n} a_j$.

11-16. Xác định chuỗi cấp số nhân sau hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ hãy tìm tổng của chuỗi.

11. $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ...$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$ 15. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$ 16. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + ...$

17-25. Xác định chuỗi đã cho hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ thì tìm tổng của nó.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$ 18. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ 19. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{n}+1)^2}{n\,(n+1)}$ 20. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1+2^{\mathrm{n}}}{3^n}$

21. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$ 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ 23. $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ 25. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left[(0.8)^{n-1} - (0.3)^n\right]$

26-29. Xác định chuỗi đã cho hội tụ hay phân kỳ bằng cách biểu diễn s_n bằng các tổng lồng vào nhau (như trong Ví dụ 5.2.6). Nếu nó hội tụ, tìm tổng của nó.

$$26.\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\qquad 27.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n+3}\qquad 28.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\,(n+3)}\qquad 29.\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$$

30-33. Biểu diễn các số sau dưới dạng phân số

30. $0.\overline{2}=0.2222...$ 31. $3.\overline{417}=3.417417...$ 32. $0.\overline{73}=0.7373...$ 33. $6.\overline{254}=6.254254$

34-36. Tìm giá trị của x để chuỗi hội tụ. Tìm tổng của chuỗi đối với các giá trị x vừa tìm được.

$$34.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\qquad 35.\ \sum_{n=0}^{\infty}2^n\,(x+1)^n\qquad 36.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^n x}{2^n}$$

41. Nếu tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là $s_n=\frac{n-1}{n+1}$ Tìm a_n và $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
42. Cho tổng riêng thứ n của một chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là $s_n=3-n2^{-n}$. Tìm $a_n$và tổng $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
45. Tìm giá trị c nếu $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n}=2$.
46. Cho dãy Fibonaci được xác định bởi phương trình

$$f_1=1,\quad f_2=1,\quad f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\qquad n\geq 3$$

Chỉ ra các mệnh đề sau đây đúng

(a) $\frac{1}{f_{n-1}\cdot f_{n+1}}=\frac{1}{f_{n-1}\cdot f_n}-\frac{1}{f_n\cdot f_{n+1}}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f_{n-1}\cdot f_{n+1}}=1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}\cdot f_{n+1}}=2$

5.3 Chuỗi số dương

Ví dụ 5.3.1. Xác định chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ hội tụ hay phân kỳ.

Giải: Hàm $f(x)=\ln x/x$ là dương và liên tục với $x>1$ vì hàm logarit liên tục. Nhưng f không hiển nhiên giảm, vậy nên chúng ta tính đạo hàm của nó:

$$f'(x)=\frac{x(1/x)-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Do đó, $f'(x) < 0$ khi $\ln x > 1$, nghĩa là $x > e$. Nó chỉ ra rằng hàm f giảm khi $x > e$ và chúng ta áp dụng tiêu chuẩn tích phân:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Bằng tiêu chuẩn tích phân, tích phân suy rộng này phân kỳ kéo theo chuỗi $\sum(\ln n)/n$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 5.3.2. Với giá trị nào của p chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ hội tụ.

Giải: Nếu $p < 0$ thì $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = \infty$. Nếu $p = 0$ thì $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = 1$. Trong cả hai trường hợp này giới hạn $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) \neq 0$, vậy nên bằng tiêu chuẩn phân kỳ chuỗi đã cho phân kỳ.

Nếu $p > 0$ thì rõ ràng hàm $f(x) = 1/x^p$ liên tục, dương và giảm trên $[1,\infty)$. Chúng ta tìm thấy trong Định lý **??** rằng

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \qquad \text{hội tụ nếu } p > 1 \text{ và phân kỳ nếu } p < 1$$

Tiêu chuẩn tích phân chỉ ra rằng chuỗi $\sum 1/n^p$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ với $0 < p \leq 1$.

Chuỗi trong Ví dụ 5.3.2 được gọi là p-chuỗi. Nó là những gì quan trọng trong chương này.

Ví dụ 5.3.3. Xác định chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{2n^2+4n+3}$ hội tụ hay phân kỳ.

Giải: Đối với n lớn, phần tử trội của mẫu là $2n^2$, vậy nên chúng ta só sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum 5(1/2n^2)$. Kết quả nhận được

$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$

vì vế trái có mẫu lớn hơn. (Trong ký hiệu của tiêu chuẩn so sánh, a_n là vế phải và b_n là vế trái.) Chúng ta biết rằng

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

hội tụ (p-chuỗi với $p = 2 > 1$). Vậy nên

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{2n^2+4n+3}$$

là hội tụ bởi phần (a) tiêu chuẩn so sánh.

Mặc dù điều kiện $a_n \leq b_n$ hoặc $a_n \geq b_n$ trong tiêu chuẩn so sánh được cho với mọi n, chúng ta chỉ cần kiểm tra rằng nó đúng với $n \geq N$, với N là một số nguyên cố định, vì tính hội tụ của một chuỗi không ảnh hưởng bởi một số hữu hạn các phần tử. Điều này được minh hoạ trong ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 5.3.4. Kiểm tra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ hội tụ phân kỳ.

Giải: Chúng ta đã sử dụng tiêu chuẩn tích phân để kiểm tra chuỗi này trong Ví dụ 1, nhưng chúng ta cũng có thể kiểm tra nó bằng việc so sánh với chuỗi điều hoà. Nhận thấy rằng $\ln n > 1$ với $n \geq 3$ và vậy nên

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geq 3$$

Chúng ta biết rằng chuỗi $\sum 1/n$ phân kỳ (p-chuỗi với $p = 1$). Vậy nên bằng tiêu chuẩn so sánh chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 5.3.5. Kiểm tra tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$.

Giải: Chúng ta sử dụng tiêu chuẩn tương đương với

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

và nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/(2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Giới hạn này tồn tại và $\sum 1/2^n$ là một chuỗi cấp số nhân hội tụ, bằng tiêu chuẩn tương đương suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 5.3.6.
(a) Xấp xỉ tổng của chuỗi $\sum 1/n^3$ bằng việc sử dụng tổng của 10 phần tử đầu. Ước lượng sai số đối với xấp xỉ này.
(b) Cần bao nhiêu phần tử để bảo đảm tổng chính xác đến 0.0005?

Giải: Trong cả hai phần (a) và (b) chúng ta cần biết $\int_n^{\infty} f(x)dx$. Với $f(x) = 1/x^3$, nó thoả mãn điều kiện của tiêu chuẩn tích phân, ta có

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_n^t = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2t^2 + \frac{1}{2n^2}} \right) = \frac{1}{2n^2}$$

$$(a) \qquad \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{1 = 10^3} \approx 1.1975$$

Theo ước lượng sai số trong (3) ta có

$$R_{10} \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Vậy độ rộng của sai số lớn nhất là 0.005.

(b) Độ chính xác nhỏ hơn 0.0005 có nghĩa là chúng ta phải tìm giá trị n sao cho $R_n \leq$ 0.0005, từ

$$R_n \leq \int_{n}^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

chúng ta muốn

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Giải bất phương trình này chúng ta nhận được

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \quad \text{hoặc} \quad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Chúng ta cần 32 phần tử để bảo đảm tổng chính xác đến 0.0005.

Ví dụ 5.3.7. Sử dụng (**??**) với $n = 10$ để ước lượng tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Giải: Bất đẳng thức trong (**??**) trở thành

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx \leq s \leq s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$$

Từ Ví dụ 5.3.6 chúng ta biết rằng

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2n^2}$$

vậy nên

$$s_{10} + \frac{1}{2.(11)^2} \leq s \leq s_{10} + \frac{1}{(10)^2}$$

Sử dụng $s_{10} \approx 1.197532$, ta nhận được

$$1.201664 \leq s \leq 1.202532$$

Nếu xấp xỉ s bằng trung điểm của đoạn này thì sai số lớn nhất là độ dài nửa đoạn. Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{với sai số } < 0.0005$$

Nếu chúng ta so sánh Ví dụ 5.3.6 và Ví dụ 5.3.7 chúng ta thấy rằng ước lượng được đưa ra trong (**??**) có thể tốt hơn ước lượng $s \approx s_n$. Để tạo nên sai số nhỏ hơn 0.0005 trong Ví dụ 5.3.6 chúng ta phải sử dụng 32 phần tử nhưng chỉ với 10 phần tử trong Ví dụ 5.3.7.

Nếu chúng ta sử dụng tiêu chuẩn so sánh để chỉ ra một chuỗi $\sum a_n$ hội tụ bằng việc so sánh với một chuỗi $\sum b_n$, thì chúng ta cũng có thể ước lượng tổng $\sum a_n$ bằng việc so sánh các phần dư như trong ví dụ được chỉ ra sau đây.

Ví dụ 5.3.8. Sử dụng tổng của 100 phần tử đầu để xấp xỉ tổng của chuỗi $\sum 1/(n^3+1)$. Ước lượng sai số của xấp xỉ này.

Giải: Từ

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$$

tiêu chuẩn so sánh cho ta chuỗi hội tụ. Phần dư T_n đối với chuỗi so sánh $\sum 1/n^3$ đã được ước lượng trong Ví dụ 5.3.6. Chúng ta tìm thấy

$$T_n \le \int_n^\infty \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2n^2}$$

Vậy nên phần dư R_n của chuỗi đã cho được thoả mãn

$$R_n \le T_n \le \frac{1}{2n^2}$$

Với $n = 100$ ta có

$$R_{100} \le \frac{1}{2.(100)^2} = 0.00005$$

Sử dụng chương trình tính toán hoặc máy chúng ta tìm được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3+1} \approx 0.6864538$$

với sai số nhỏ hơn 0.00005.

BÀI TẬP

1. Giả sử $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là hai chuỗi số dương và $\sum b_n$ là chuỗi hội tụ.

(a) Nếu $a_n > b_n$ với mọi n, bạn có thể nói gì về chuỗi $\sum a_n$? Tại sao?

(b) Nếu $a_n < b_n$ với mọi n, bạn có thể nói gì về chuỗi $\sum a_n$? Tại sao?

2. Giả sử $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là hai chuỗi số dương và $\sum b_n$ là chuỗi phân kỳ.

(a) Nếu $a_n > b_n$ với mọi n, bạn có thể nói gì về chuỗi $\sum a_n$? Tại sao?

(b) Nếu $a_n < b_n$ với mọi n, bạn có thể nói gì về chuỗi $\sum a_n$? Tại sao?

3. Việc phân biệt giữa các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^b \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b^n$$

là quan trọng. Chuỗi thứ nhất có tên là gì? Đối với chuỗi thứ hai? Với giá trị nào của b thì chuỗi thứ nhất hội tụ? Với giá trị nào của b thì chuỗi thứ hai hội tụ?

4-6. Sử dụng tiêu chuẩn tích phân xác định các chuỗi sau là hội tụ hay phân kỳ.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

7-8. Sử dụng tiêu chuẩn so sánh xác định các chuỗi sau là hội tụ hay phân kỳ.

$$7.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \qquad 8.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

9-22. Xác định xem chuỗi hội tụ hay phân kỳ.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n^4} + \frac{4}{n\sqrt{n}}\right)$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^4+1}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$ 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

17. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$ 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{10^n}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

23. Tìm giá trị của p để chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

24.

(a) Tìm tổng riêng s_{10} của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Ước lượng sai số khi sử dụng s_{10} như một xấp xỉ của chuối.

(b) Sử dụng (4) để cho một xấp xỉ tốt hơn của tổng.

(c) Tìm một giá trị n sao cho s_n nằm trong phạm vi 0.00001 của tổng.

25.

(a) Sử dụng tổng của 10 phần tử đầu để ước lượng tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Độ tốt của ước lượng này là bao nhiêu?

(b) Sử dụng (4) cải thiện ước lượng này với $n = 10$.

(c) Tìm một giá trị n sao cho sai số trong xấp xỉ $s \approx s_n$ nhỏ hơn 0.001.

26. Nghĩa của việc biểu diễn phân số thập phâncủa số $0.d_1d_2d_3..$ (với d_i là một trong các số $0, 1, 2, 3, ..., 9$) là

$$0.d_1d_2d_3... = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^3} + \cdots$$

Chỉ ra rằng chuỗi này luôn hội tụ.

27. Tìm tất cả các giá trị dương của b để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ hội tụ.

28. Nếu chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ có đúng là cũng hội tụ không?

29. Chỉ ra rằng, nếu $a_n > 0$ và $\sum a_n$ hội tụ thì $\sum \ln(1 + a_n)$ hội tụ.

5.4 Một số tiêu chuẩn hội tụ khác

Ví dụ 5.4.1. Các chuỗi sau là chuỗi đan dấu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Ví dụ 5.4.2. Chuỗi điều hoà luân phiên

$$1 - \frac{}{1}2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

thoả mãn

$$(i) \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad \text{vì} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$(ii) \quad \lim_{n\to\infty} b_n == \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

nên bằng tiêu chuẩn chuỗi luân phiên nó hội tụ.

Ví dụ 5.4.3. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ là chuỗi luân phiên, nhưng

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

vậy nên điều kiện (ii) không thoả mãn. Thay vì vậy, chúng ta xét giới hạn của phần tử thứ n của chuỗi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}.$$

Giới hạn này không tồn tại, nên theo tiêu chuẩn phân kỳ chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 5.4.4. Kiểm tra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$hội tụ hay phân kỳ.

Giải: Chuỗi đã cho là chuỗi luân phiên nên chúng ta thử kiểm tra các điều kiện (i) và (ii) của tiêu chuẩn chuỗi luân phiên.

Không tương tự ví dụ 5.4.2, không dễ dàng chỉ ra được dãy đã cho $b_n = n^2/(n^3+1)$ giảm. Tuy nhiên nếu chúng ta xét hàm thay thế $f(x) = x^2/(x^3+1)$, ta tìm thấy rằng

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)}$$

Chỉ xét với những giá trị x dương nên chúng ta nhận thấy rằng $f'(x) < 0$ nếu $2 - x^3 < 0$, có nghĩa là $x > \sqrt[3]{2}$. Như vậy, $f(x)$ giảm trên khoảng $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Điều này có nghĩa là $f(n+1) < f(n)$ và vậy nên $b_{n+1} < b_n$ khi $n \geq 2$. (Bất đẳng thức $b_2 < b_1$ có thể kiểm tra trực tiếp, nhưng tất cả những gì cần quan tâm là dãy $\{b_n\}$ rút cuộc giảm.)

Điều kiện (ii) được kiểm tra thoả mãn:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{tn\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$

Vậy bằng tiêu chuẩn chuỗi luân phiên thì chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 5.4.5. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

hội tụ tuyệt đối vì

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

là một p-chuỗi hội tụ ($p = 2$).

Ví dụ 5.4.6. Chúng ta biết rằng chuỗi điều hoà luân phiên

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

hội tụ (xem Ví dụ 5.4.2), nhưng nó không hội tụ tuyệt đối vì giá trị tuyệt đối tương ứng với nó là

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

nó là chuỗi điều hoà (p-chuỗi với $p = 1$) và hiển nhiên là nó phân kỳ.

Ví dụ 5.4.6 chỉ ra rằng, với một chuỗi hội tụ có thể không hội tụ tuyệt đối. Nhưng Định lý sau đây chỉ ra rằng một chuỗi hội tụ tuyệt đối kéo theo nó hội tụ.

Ví dụ 5.4.7. Xác định chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

hội tụ hay phân kỳ.

Giải: Chuỗi này có cả phần tử dương lẫn phần tử âm, nhưng nó không là chuỗi luân phiên. (Phần tử thứ nhất dương, ba phần tử tiếp theo âm, ba phần tử sau đó dương. Các dấu không luân phiên.) Chúng ta có thể áp dụng tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi trị tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{\infty} \leq \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Từ $|\cos n| \leq 1$ với mọi n, ta có

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Chúng ta biết rằng chuỗi $\sum 1/n^2$ hội tụ (p-chuỗi với $p = 2$), và bằng tieu chuẩn so sánh suy ra chuỗi $\sum |\cos n|/n^2$ hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, bằng Định lý **??** suy ra nó hội tụ.

Ví dụ 5.4.8. Kiểm tra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ có hội tụ tuyệt đối hay không.

Chúng ta sử dụng tiêu chuẩn so sánh với $a_n = (-1)^n n^3/3^n$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3} < 1$$

Vậy, bằng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và hiển nhiên hội tụ.

Ví dụ 5.4.9. Kiểm tra tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Phần tử $a_n = \frac{n^n}{n!}$ dương nên chúng ta không cần lấy dấu giá trị tuyệt đối.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!}.\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ khi } n \to \infty$$

Với $e > 1$, sử dụng tiêu chuẩn tỷ số ta có chuỗi đã cho phân kỳ.

Chú ý: Mặc dù tiêu chuẩn tỷ số hiệu quả cho ví dụ 5.4.9, chúng ta vẫn có phương pháp khác để kiểm tra tính phân kỳ của chuỗi. Từ

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n.n.n.n....n}{1.2.3.4.5....n} \geq n$$

chỉ ra rằng a_n không dần về 0 khi $n \to \infty$. Vậy bằng tiêu chuẩn phân kỳ, chuỗi đã cho phân kỳ.

BÀI TẬP

1. (a) Với các điều kiện gì thì một chuỗi luân phiên hội tụ?

(b) Nếu các điều kiện thoả mãn, bạn có thể nói gì về phần dư sau n phân tử của chuỗi luân phiên?

2. Bạn có thể nói gì về chuỗi $\sum a_n$ trong các trường hợp sau?

$(a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8 \quad (b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

$(c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

3-8. Kiểm tra các chuỗi sau hội tụ hay phân kỳ.

3. $\dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{8} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{10} + \dfrac{4}{11} - \cdots$

4. $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{4} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{5}{7} + \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

9. Sử dụng tổng riêng thứ 50, s_{50} để xấp xỉ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ và ước lượng sai số.

10. Tính tổng riêng thứ 10 của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Ước lượng sai số khi sử dụng tổng riêng thứ 10 để xấp xỉ tổng của chuỗi.

11. Với giá trị nào của p thì chuỗi sau hội tụ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

12. Chỉ ra các chuỗi sau hội tụ. Chúng ta cần bao nhiêu phần tử cộng lại để nhận được tổng của chuỗi với độ chính xác được chỉ ra?

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \quad (|error| < 0.001)$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} \quad (|error| < 0.00005)$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n.e^{-n} \quad (|error| < 0.01)$

15-16. Chứng minh chuỗi hội tụ và sử dụng Định lý thiết lập tổng chuỗi luân phiên để ước lượng tổng của chuỗi, chính xác đến bốn chữ số thập phân.

$$15.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \qquad 16.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$$

17-18. Chứng minh chuỗi hội tụ va xấp xỉ tổng của chuỗi chính xác đến bốn chữ số thập phân

$$17.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{10^n} \qquad 18.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3^n n!}$$

19-30. Xác định chuỗi có hội tụ tuyệt đối không.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^3}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$ 22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^4}$ 25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{4^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n^2}$ 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$

29. $1-\frac{1.3}{3!}+\frac{1.3.5}{5!}-\frac{1.3.5.7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.7.\cdots.(2n-1)}{(2n-1)!}+\cdots$

30. $\frac{2}{5}+\frac{2.6}{5.8}+\frac{2.6.10}{5.8.11}+\frac{2.6.10.14}{5.8.11.14}+\cdots$

31. Các phần tử của một chuỗi được xác định truy hồi bằng phương trình

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n$$

Xác định chuỗi $\sum a_n$ hội tụ hay phân kỳ.

32. Một chuỗi $\sum a_n$ được xác định bởi phương trình

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}a_n$$

Xác định chuỗi $\sum a_n$ hội tụ hay phân kỳ.

5.5 Chuỗi lũy thừa

5.5.1 Khái niệm chuỗi lũy thừa.

Ví dụ 5.5.1. Với giá trị nào của x thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ hội tụ?

Giải: Chúng ta sử dụng tiêu chuẩn tỷ số. Nếu như thường lệ, chúng ta đặt a_n ký hiệu là phần tử thứ n của chuỗi thì $a_n = n!x^n$. Nếu $x \neq 0$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

Bằng tiêu chuẩn so sánh chuỗi phân kỳ khi $x \neq 0$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 5.5.2. Với giá trị nào của x thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ hội tụ?

Giải: Đặt $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$, khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}.\frac{(x-3)^n}{n}\right| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \text{ khi } n \to \infty$$

Bằng tiêu chuẩn tỷ số, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, và hiển nhiên hội tụ khi $|x-3| < 1$ và phân kỳ khi $|x-3| > 1$. Ta có

$$|x-3| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x-3 < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 4$$

vậy nên chuỗi hội tụ khi $1 < x < 4$ và phân kỳ khi $x < 2$ hoặc $x > 4$.

Tiêu chuẩn tỷ số không cho thông tin gì khi $|x-3| = 1$ nên chúng ta phải xét $x = 2$ và $x = 4$ tách biệt. Nếu chúng ta cho $x = 4$ vào chuỗi, nó trở thành $\sum 1/n$, chuỗi điều hoà nên nó phân kỳ. Nếu $x = 2$, chuỗi trở thành $\sum(-1)^n/n$, bằng tiêu chuẩn luân phiên chuỗi hội tụ. Vậy chuỗi luỹ thừa đã cho hội tụ với $2 \leq x < 4$.

Ví dụ 5.5.3. Tìm tập xác định của hàm Bessel cấp 0 được xác định

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Giải: Đặt $a_n = (-1)nx^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}.\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}.\frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1$$

với mọi x. Vậy, bằng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ với mọi x. Nói cách khác, tập xác định của hàm Bessel J_0 là $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Ví dụ 5.5.4. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

Giải: Đặt $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| = 3\sqrt{\frac{1+(1/x)}{1+(2/n)}}|x| \to 3|x| \text{ khi } n \to \infty$$

Bằng tiêu chuẩn hội tụ, chuỗi đã cho hội tụ nếu $3|x| < 1$ và phân kỳ nếu $3|x| > 1$. Vậy nên chuỗi hội tụ nếu $|x| < \frac{1}{3}$ và phân kỳ nếu $|x| > \frac{1}{3}$. Điều này có nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \frac{1}{3}$.

Chúng ta biết rằng chuỗi hội tụ trong khoảng $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, nhưng bây giờ chúng ta cần kiểm tra tính hội tụ của chuỗi tại hai đầu mút của khoảng. Nếu $x = -\frac{1}{3}$, chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

nó phân kỳ. (Sử dụng tiêu chuẩn tích phân hoặc nhận được một cách đơn giản nó là p-chuỗi với $p = \frac{1}{2} < 1$.) Nếu $x = \frac{1}{3}$, chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n . \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

bằng tiêu chuẩn chuỗi luân phiên, nó hội tụ. Vậy chuỗi luỹ thừa đã cho hội tụ khi $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$, nên miền hội tụ là $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Ví dụ 5.5.5. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Giải: Nếu $a_n = n(x+2)^n$, khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} . \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n)}[n!]^2}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \text{ khi } n \to \infty$$

Sử dụng tieu chuẩn tỉ số, chúng ta thấy rằng chuỗi hội tụ nếu $|x+2|/3 < 1$ và nó phân kỳ nếu $|x+2|/3 > 1$. Vậy, chuỗi hội tụ nếu $|x-2| < 3$ và nó phân kỳ nếu $|x+2| > 3$. Do đó bán kính hội tụ là $R = 3$.

Bất đẳng thức $|x+2| < 3$ có thể được viết lại $-5 < x < 1$, vậy nên chúng ta có thể kiểm tra chuỗi tại các điểm đầu mút -5 và 1. Khi $x = -5$, chuỗi là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

bằng tiêu chuẩn phân kỳ, chuỗi này phân kỳ $[(-1)^n n$ không hội tụ về $0]$. Khi $x = 1$, chuỗi là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

bằn tiêu chuẩn phân kỳ, nó cũng phân kỳ. Vậy chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $-5 < x < 1$, vậy miền hội tụ là $(-5, 1)$.

BÀI TẬP

1. (a) Khái niệm chuỗi luỹ thừa?

(b) Khái niệm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa? Làm thế nào để tìm nó?

(c) Khái niệm miền hội tụ của một chuỗi luỹ thừa? Làm thế nào để tìm đó.

2-15. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 7. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n lnn}$ 8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ 11. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)}$ 12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

16 Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ hội tụ, nó có chỉ ra rằng các chuỗi sau hội tụ hay không?

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2)^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-4)^n$$

17 Giả sử chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hội tụ khi $x = -4$ và phân kỳ khi $x = 6$. Chúng ta có thể nói gì về tính hội tụ, phân kỳ của các chuỗi sau?

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n \quad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$$

18. Với k là một số nguyên dương, tìm bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

19. Hàm J_1 được xác định bởi

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

được gọi là hàm Bessel cấp 1.

(a) Tìm tập xác định của hàm.

(b) Vẽ một vài phần tử đầu của các tổng riêng trên cùng một hệ trục.

20. Một hàm A được xác định

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \cdots$$

được gọi là hàm Airy được tìm thấy bởi nhà toán học và thiên văn học Sir George Airy (1801-1892).
(a) Tìm tập xác định của hàm Airy.
(b) Vẽ một vài phần tử đầu của của các tổng riêng $s_n(x)$ trên cùng một hệ trục.
21 Một hàm f được xác định bởi

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

nghĩa là, các hệ số là $c_{2n} = 1$ và $c_{2n+1} = 2$ với mọi $n \geq 0$. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi và công thức chính xác của $f(x)$.
22. Nếu $f(x) = \sum a_n x^n$ có bán kính hội tụ 2 và chuỗi $\sum d_n x^n$ có bán kính hội tụ 2. Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum (a_n + d_n)x^n$ bằng bao nhiêu?
23. Giả sử rằng bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum c_n x^n$ là R. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum c_n x^{2n}$ bằng bao nhiêu?

5.6 Biểu diễn hàm bằng tổng của một chuỗi lũy thừa

Ví dụ 5.6.1. Biểu diễn hàm $1/(1 + x^2)$ bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa và tìm khoảng hội tụ.

Giải: Thay x bởi $-x^2$ trong phương trình (**??**), ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Vì đây là chuỗi cấp số nhân, nó hội tụ khi $|-x^2| < 1$, nghĩa là $x^2 < 1$, hoặc $|x| < 1$. Vậy nên khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

Ví dụ 5.6.2. Tìm một chuỗi luỹ thừa biểu diễn $1/x + 2$

Giải: Để có thể biểu diễn hàm này dưới dạng phương trình (**??**), trước hết chúng ta đặt nhân tử 2 ra ngoài

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Chuỗi này hội tụ khi $|-x/2| < 1$, nghĩa là $|x| < 2$. Vậy khoảng hội tụ của chuỗi là $(-2, 2)$.

Ví dụ 5.6.3. Tìm một chuỗi luỹ thừa biểu diễn $x^3/(x + 2)$.

Giải: Ta có, hàm này chính xác là hàm trong Ví dụ 5.6.2 nhân với x^3, chúng ta có thể nhận được một cách đơn giản bằng cách nhân tất cả các phần tử của chuỗi với x^3:

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3\frac{1}{x+2} = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+3}}$$
$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Một cách viết khác của chuỗi này như sau

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n$$

Như ví dụ 5.6.2, khoảng hội tụ là $(-2, 2)$.

5.6.1 Đạo hàm và tích phân của một chuỗi lũy thừa - ứng dụng

Ví dụ 5.6.4. Trong Ví dụ 5.5.3 chúng ta thấy rằng hàm Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

xác định với mọi x. Vậy, theo Định lý **??**, J_0 khả vi với mọi x và đạo hàm của nó tìm được bằng cách đạo hàm các phần tử như sau

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Ví dụ 5.6.5. Biểu diễn $1/(1-x)^2$ bằng một chuỗi luỹ thừa bằng cách đạo hàm phương trình (**??**). Bán kính hội tụ bằng bao nhiêu?

Giải: Đạo hàm hai vế của phương trình

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ta được

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

Nếu cần chúng ta có thể thay n bởi $n+1$ và viết kết quả dưới dạng

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Theo Định lý **??**, bán kính hội tụ của chuỗi đạo hàm trùng với bán kính hội tụ của chuỗi ban đầu, vậy $R = 1$.

Ví dụ 5.6.6. Tìm chuỗi luỹ thừa biểu diễn hàm $\ln(1-x)$ và bán kính hội tụ của nó.

Giải: Chúng ta nhận thấy rằng, đạo hàm của hàm này là $1/(1-x)$, khi đã nhân hàm với -1. Do đó lấy tích phân hai vế của phương trình (**??**):

$$\begin{aligned}-\ln(1-x) &= \int \frac{1}{1-x}dx = \int (1+x+x^2+\cdots)dx \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1\end{aligned}$$

Đối với việc xác định C, chúng ta cho $x = 0$ vào hai phương trình và nhận được $-\ln(1-0) = C$. Vậy $C = 0$ và

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

Bán kính hội tụ là bán kính hội tụ của chuỗi ban đầu, $R = 1$.

Chú ý rằng, những gì xảy ra nếu chúng ta cho $x = \frac{1}{2}$ vào kết quả của Ví dụ 5.6.6, với $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ là

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Ví dụ 5.6.7. Tìm chuỗi luỹ thừa biểu diễn hàm $f(x) = \tan^{-1} x$.

Giải: Chúng ta nhận thấy rằng, $f'(x) = 1/(1+x^2)$ và tìm chuỗi mong muốn bằng cách tích phân chuỗi luỹ thừa $1/(1+x^2)$ đã tìm thấy trong Ví dụ 5.6.1.

$$\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int (1-x^2+x^4-x^6+\cdots)dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Đối với việc tìm C chúng ta chọn $x = 0$ và nhận được $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Vậy ta có

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi đối với $1/(1+x^2)$ là 1 nên bán kính hội tụ của chuỗi $\tan^{-1} x$ cũng là 1.

Ví dụ 5.6.8.

(a) Xác định $\int \frac{1}{1+x^7}dx$ bằng một chuỗi luỹ thừa.

(b) Sử dụng phần (a) để xấp xỉ $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx$ phạm vi chính xác nhỏ hơn 10^{-7}.

Giải:

(a) Bước thứ nhất chúng ta biểu diễn hàm $1/(1+x^7)$ bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa. Như trong Ví dụ 5.6.1, chúng ta bắt đầu với phương trình (**??**) và thay x bằng $-x^7$:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^7)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Bây giờ chúng ta tích phần từng phần tử

$$\int \frac{1}{1+x^7}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{7n}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{7n+1}}{7n+1} = C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Chuỗi này hội tụ với $|-x^7| < 1$, nghĩa là, với $|x| < 1$.

(b) Sử dụng nguyên hàm từng phần (a) với $C = 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx &= \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8.2^8} + \frac{1}{15.2^{15}} - \frac{1}{22.2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots\end{aligned}$$

Chuỗi vô hạn này là giá trị chính xác của tích phân xác định, nhưng từ việc nó là chuỗi luân phiên, chúng ta có thể sử dụng Định lý ước lượng tổng của chuỗi luân phiên để xấp xỉ tổng của chuỗi. Nếu dùng tổng sau phần tử với $n = 3$, sai số nhỏ hơn phần tử với $n = 4$:

$$\frac{1}{29.2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

Vậy chúng ta có

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8.2^8} + \frac{1}{15.2^{15}} - \frac{1}{22.2^{22}} \approx 0.49952374$$

5.6.2 Khai triển Taylor và khai triển Maclaurin

Ví dụ 5.6.9. Tìm chuỗi hàm Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$ và bán kính hội tụ của nó.

Giải: Nếu $f(x) = e^x$, thì $f^{(n)}(x) = e^x$, nên $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ với mọi n. Vậy, chuỗi Taylor của hàm f tại lân cận điểm 0 (chính là chuỗi Maclaurin) là

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Đối với việc tìm bán kính hội tụ chúng ta đặt $a_n = x^n/n!$. Thì

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

vậy, bằng tiêu chuẩn tỷ số, chuỗi hội tụ với mọi x và bán kính hội tụ $R = \infty$.

Ví dụ 5.6.10. Chứng minh rằng e^x bằng tổng chuỗi Maclaurin của nó.

Giải: Với $f(x) = e^x$, khi đó $f^{n+1}(x) = e^x$ với mọi n. Nếu d là một số thực bất kỳ và $|x| \leq d$ thì $|f^{n+1}(x)| = e^x \leq e^d$. Vậy bất đẳng thức Taylor với $a = 0$ và $M = e^d$ nói rằng

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{với} \qquad |x| < d$$

Chú ý rằng, cùng một hằn số $M = e^d$ dùng đối với mọi giá trị n. Nhưng từ phương trình **??**, chúng ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} = 0$$

Định lý kẹp chỉ ra rằng $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ và vậy nên $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Bằng Định lý **??**, e^x bằng tổng chuỗi Maclaurin của nó, nghĩa là

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \qquad \text{với mọi } x} \tag{5.3}$$

Đặc biết, nếu chúng ta cho $x = 1$ trong phương trình (5.3), chúng ta nhận được biểu diễn sau đối vơi số e bàng một tổng của tổng vô hạn:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{5.4}$$

Ví dụ 5.6.11. Tìm chuỗi Taylor đối với $f(x) = e^x$ tại $a = 2$.

Giải: Chúng ta có $f^{(n)}(2) = e^2$ và vậy nên, cho $a = 2$ trong định nghĩa của chuỗi Taylor (**??**), chúng ta nhận được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Quay lại Ví dụ 5.6.9, chúng ta kiểm tra được rằng bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$. Bằng Ví dụ 5.6.10 chúng ta kiểm tra được rằng $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, vậy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{với mọi } x \tag{5.5}$$

Chúng ta có hai thác triển chuỗi luỹ thừa đối với e^x, chuỗi Maclaurin trong phương trình (5.3) và chuỗi Taylor trong phương trình (5.5). Phương trình thứ nhất là tốt nếu chúng ta quan tâm đến những x gần 0 và chuỗi thứ hai là tốt hơn nếu x gần 2.

Ví dụ 5.6.12. Tìm chuỗi Maclaurin đối với $\sin x$ và chứng minh rằng nó biểu diễn $\sin x$ đối với mọi x.

Giải: Chúng ta sắp xếp kết quả tính toán vào hai cột như sau

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \qquad f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Nhận thấy các nguyên hàm quay lại theo chu kỳ bốn phần tử, chúng ta có thể viết chuỗi Maclaurin như sau:

$$f(0) + \frac{f\text{''}(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Từ $f^{(n+1)}(x)$ là $\pm\sin x$ hoặc $\pm\cos x$, chúng ta biết rằng $|f^{(n+1)}(x)| \le 1$ với mọi x. Vậy chúng ta có thể lấy $M = 1$ trong bất đẳng thức Taylor:

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5.6}$$

Phương trình (**??**) chỉ ra rằng, vế phải của bất đẳng thức này dần về 0 khi $n \to \infty$, vậy theo Định lý kẹp, $|R_n(x)| \to 0$. Nó chỉ ra rằng $R_n(x) \to 0$ khi $n \to \infty$, vậy bằng Định lý **??**, $\sin x$ bằng tổng chuỗi Maclaurin của nó.

Chúng ta tổng kết kết quả của Ví dụ 5.6.12 cho sự tham khảo trong tương lai.

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+!}}{(2n+1)!} \qquad \text{với mọi } x} \tag{5.7}$$

Ví dụ 5.6.13. Tìm chuỗi Maclaurin đối với $\cos x$.

Giải: Chúng ta có thể tiến hành trực tiếp như Ví dụ 5.6.12 nhưng sẽ dễ dàng hơn nếu chúng ta lấy đạo hàm chuỗi Maclaurin đối với $\sin x$ cho bởi phương trình (**??**):

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{d}{dx}(\sin x)\frac{d}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) \\ &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

Chuỗi Maclaurin đối với $\sin x$ hội tụ với mọi x, Định lý **??** suy ra chuỗi đạo hàm đối với $\cos x$ cũng hội tụ với mọi x. Vậy

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{với mọi } x} \tag{5.8}$$

Ví dụ 5.6.14. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm $f(x) = x\cos x$.

Giải: Thay vì tính đạo hàm và thay thế trong phương trình (**??**), một cách dễ dàng là nhân chuỗi luỹ thừa đối với $\cos x$ (Phương trình (**??**)) bởi x:

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

Ví dụ 5.6.15. Biểu diễn $f(x) = \sin x$ bằng tổng chuỗi Taylor của nó tâm tại $\pi/3$.

Giải: Sắp xếp kết quả theo các cột, chúng ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\\
f''(x) &= -\sin x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

và mẫu này được lặp lại vô hạn lần. Từ đó, chuỗi Taylor tại $\pi/3$ là

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2.1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2.2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2.3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Chứng minh chuỗi này biểu diễn $\sin x$ với mọi x là hoàn toàn tương tự như trong Ví dụ 5.6.12 [đơn giản thay x bởi $x - \pi/3$ trong (5.6)]. Chúng ta có thể viết chuỗi theo ký hiệu xích ma nếu chúng ta tách các phần tử chứa $\sqrt{3}$ ra:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{n(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+!}$$

Các chuỗi luỹ thừa chúng ta nhận được bằng phương pháp trực tiếp trong các Ví dụ 5.6.13 và 5.6.14 và trong mục 2.6 chính xác là chuỗi Taylor hoặc chuỗi Maclaurin của một hàm đã cho Vì Định lý **??** khẳng định rằng, làm thế nào để chúng ta nhận được một chuỗi luỹ thừa biểu diễn $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$ không là vấn đề, $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ luôn đúng. Nói cách khác các hệ số luôn xác định duy nhất.

5.7 Một số ứng dụng khác của chuỗi lũy thừa.

Ví dụ 5.7.1.

(a) Biểu diễn $\int e^{-x^2}dx$ bằng một chuỗi vô hạn.

(b) Tính $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ chính xác với sai số nhỏ hơn 0.001.

Giải:

(a) Trước hết chúng ta tìm chuỗi Maclaurin đối với $f(x) = e^{-x^2}$. Mặc dù chúng ta có thể sử dụng phương pháp trực tiếp, nhưng hãy tìm cách đơn giản hơn bằng việc thay x bằng $-x^2$ trong chuỗi đối với e^x cho trong bảng các chuỗi Maclaurin. Vậy, với mọi x chúng ta có

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Bây giờ chúng ta tích phân từng hạng tử

$$\begin{aligned}\int e^{-x^2}dx &= \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx \\ &= C + x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots\end{aligned}$$

Chuỗi này hội tụ với mọi x vì chuỗi ban đầu đối với e^{-x^2} hội tụ với mọi x.

(b) Định lý tính giá trị cho kết quả

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \left[x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \\ &\approx 0.7475\end{aligned}$$

Định lý ước lượng chuỗi luân phiên chỉ ra rằng sai số tương ứng với xấp xỉ này nhỏ hơn

$$\frac{1}{11.5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$

Ví dụ 5.7.2. Tính $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Giải: Sử dụng chuỗi Maclaurin đối với e^x chúng ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vì chuỗi luỹ thừa là các hàm liên tục

BÀI TẬP

1-8. Tìm chuỗi luỹ thừa biểu diễn đối với hàm và xác định khoảng hội tụ.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 3. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ 6. $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$ 7. $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ 8. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

9. (a) Sử dụng đạo hàm để tìm một chuỗi luỹ thừa biểu diễn $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

(b) Sử dụng (a) tìm một chuỗi luỹ thừa đối với $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$

(c) Sử dụng (b) để tìm một chuỗi luỹ thừa đối với $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$

10. (a) Tìm một chuỗi luỹ thừa biểu diễn hàm $f(x) = \ln(x^2+1)$. Bán kính hội cụ của nó bằng bao nhiêu?

(b) Sử dụng phần (a) để tìm một chuỗi luỹ thừa đối với $f(x) = x\ln(1+x)$.

(c) Sử dụng phần (a) để tìm một chuỗi luỹ thừa đối với $f(x) = \ln(x^2+1)$

11-14. Tìm một chuỗi luỹ thừa biểu diễn hàm và xác định bán kính hội tụ.

11.$f(x) = \ln(5-x)$ 12.$f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ 13.$f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ 14.$f(x) = \arctan(x/3)$

15-18. Tìm một chuỗi luỹ thừa biểu diễn đối với f, vẽ f và một vài phần tử tổng riêng $s_n(x)$ trên cung một hệ trục. Điều gì xảy ra khi n tăng?

15.$f(x) = \ln(3+x)$ 16.$f(x) = \dfrac{1}{x^2+25}$ 17.$f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ 18.$f(x) = \tan^{-1}(2x)$

19-22. Xác định tích phân bất định bằng một chuỗi luỹ thừa. Bán kính hội tụ của nó là bao nhiêu?

19. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^8}dt$ 20. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}dt$ 21. $\displaystyle\int \frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}dx$ 22. $\displaystyle\int \tan^{-1}(x^2)dx$

25-28 Sử dụng chuỗi luỹ thừa để xấp xỉ tích phân xác định sai số đến sáu chữ số thập phân

25. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}dx$ 26. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1+x^4)dx$ 27. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ 28. $\displaystyle\int_0^{0.1} x\arctan(3x)dx$

29. Sử dụng kết quả của Ví dụ 5.6.6 để tính $\ln 1.1$ chính xác đến năm chữ số thập phân.

30. Chỉ ra rằng hàm $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ là nghiệm của phương trình vi phân $f''(x) +$

$f(x) = 0$.

31. (a) Bắt đầu với chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ $|x| < 1$

(b) Tìm tổng của các chuỗi sau (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,\ |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Tìm tổng của mỗi chuỗi sau.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n,\ |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

32. Sử dụng chuỗi luỹ thừa đối với $\tan^{-1} x$ để chứng minh biểu diễn sau của π bằng tổng của một chuỗi vô hạn:$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$

33-44. Sử dụng Định nghĩa một chuỗi Maclaurin tìm chuỗi Maclaurin của hàm $f(x)$ [Giả sử f có một biểu diễn chuỗi lũy thừa. Không cần chỉ ra $R_n(x) \to 0$.] Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

33.$f(x) = \cos x$	34.$f(x) = \cos x, a = \pi$	35.$f(x) = (1+x)^{-3}$
36.$f(x) = \ln(1+x)$	37.$f(x) = \sin 2x$	38.$f(x) = x^3,\ a = -1$
39.$f(x) = e^x,\ a = 3$	40.$f(x) = \ln x,\ a = 2$	41. $f(x) = 1 + x + x^2,\ a = 2$
42. $f(x) = \sin x,\ a = \pi/2$	43. $f(x) = 1/\sqrt{x},\ a = 9$	44. $f(x) = x^{-2},\ a = 1$

45-52. Sử dụng các chuỗi Maclaurin của các hàm đơn giản (trong các Ví dụ) để tìm chuỗi Maclaurrin của hàm tương ứng

45. $f(x) = \cos \pi x$	46. $f(x) = e^{-x/2}$	47. $f(x) = x \tan^{-1} x$
48. $f(x) = \sin(x^4)$	49. $f(x) = x^2 e^{-x}$	50. $f(x) = x \cos 2x$

51. $f(x) = \sin^2 x$ 52. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin x}{x^3} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{6} & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$

53-56. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm f (bằng bất kỳ phương pháp nào) và bán kính hội tụ của nó.

53. $f(x) = \sqrt{1+x}$ 54. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$ 55. $f(x) = \cos(x^2)$ 56. $f(x) = 2^x$

57. Sử dụng chuỗi Maclaurin của e^x để tính $e^{-0,2}$ chính xác đến năm chữ số thập phân.

58. Sử dụng chuỗi Maclaurin của $\sin x$ để tính $\sin 3^o$ chính xác đến năm chữ số thập phân.

59-62. Biểu diễn tích phân xác định bằng một chuỗi lũy thừa

59. $\displaystyle\int x\cos(x^3)dx$ 60. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}dx$ 61. $\displaystyle\int \sqrt{x^3+1}dx$ 62. $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}dx$

63-65. Sử dụng lý thuyết chuỗi chuỗi để xấp xỉ tích phân xác định với độ chính xác được chỉ ra tương ứng.

63. $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ (ba chữ số thập phân). 63'. $\int_0^{0,5} \cos(x^2)dx$ (ba chữ số thập phân).

64. $\int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}dx$ (|sai số| $< 10^{-8}$) 65. $\int_0^{0,5} x^2e^{-x^2}dx$ (|sai số| $< 0,001$).

65-67. Sử dụng chuỗi để tính giới hạn.

$$65.\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3} \quad 66.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x-e^x} \quad 67.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

68- 71. Sử dụng phép nhân hoặc phép chia để tìm ba phần tử khác không đầu tiên trong chuỗi Maclaurin của các hàm.

68. $y = e^{-x^2}\cos x$ 69. $y = \sec x$ 70. $y = \dfrac{x}{\sin x}$ 71. $y = e^x\ln(1-x)$

72-77. Tìm tổng của các chuỗi

$$72.\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{n!} \quad 73.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} \quad 74.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$$

$$75.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n n!} \quad 76.\ 3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\cdots \quad 77.\ 1-\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}-\frac{(\ln 2)^3}{3!}+\cdots$$

Mục lục