VECTƠ GRADIENT

Ta đã biết:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)a + f_y(x,y)b \\ &= < f_x(x,y), f_y(x,y) > \cdot < a,b > \\ &= < f_x(x,y), f_y(x,y) > \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Vectơ $< f_x(x,y), f_y(x,y) >$ không đơn thuần là việc tính toán các đạo hàm theo hướng , nó xuất hiện trong nhiều ngữ cảnh khác rất hay . Vì thế nó được đặt một cái tên rất đặc biệt "***Gradient của*** f" và được ký hiệu là $Grad\ f$ hoặc ∇f .

**** Định nghĩa***: Cho f là một hàm hai biến . Khi đó Gradient của f là một hàm vectơ ∇f được xác định bởi:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Như thế chúng ta có được:

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

Biểu thức sau cùng nói lên rằng đạo hàm theo hướng vectơ u chính là phép chiếu vô hướng của vectơ Gradient lên u .

Mở rộng đối với hàm 3 biến

* Đạo hàm theo hướng của hàm f tại (x_0, y_0, z_0) theo hướng của vectơ đơn vị $u = < a,b,c >$ là:

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

khi giới hạn trên tồn tại.

Bằng cách tính toán tương tự như hàm hai biến, chúng ta có:

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c$$

Tương tự ta có được vectơ Gradient là:

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Ví dụ : Cho $f(x, y) = sinx + e^{xy}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle \end{aligned}$$

$$\nabla f(0,1) = \langle 2, 0 \rangle$$