

## 4.1 Bài tập về phương trình vi phân

1. Chỉ ra rằng  $y = x - x^{-1}$  là một nghiệm của phương trình vi phân  $xy' + y = 2x$ .
2. Kiểm tra rằng  $y = \sin x \cos x - \cos x$  là một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x, y(0) = -1$$

với  $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

(a) Với giá trị nào của  $r$  hàm  $y = e^{rx}$  thoả mãn phương trình vi phân  $2y'' + y' - y = 0$

(b) Nếu  $r_1$  và  $r_2$  là các giá trị  $r$  được tìm thấy trong (a) chỉ ra rằng mọi phần tử thuộc họ  $y = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$  cũng là một nghiệm của phương trình.

3. (a) Với giá trị nào của  $k$  thì hàm  $y = \cos kt$  thoả mãn phương trình vi phân  $4y'' = -25y$ ?

(b) Với các giá trị  $k$  này, kiểm tra rằng bất kỳ các phần tử của họ các hàm  $y = A \sin kt + b \cos kt$  cũng là một nghiệm.

4. Hàm nào trong các hàm sau đây là nghiệm của phương trình vi phân  $y'' + y = \sin x$ ?

$$(a) y = \sin x, \quad (b) y = \cos x, \quad (c) y = \frac{1}{2}x \sin x, \quad (d) y = -\frac{1}{2}x \cos x$$

5. (a) Chỉ ra rằng mọi phần tử thuộc họ các hàm  $y = \frac{\ln x + C}{x}$  là nghiệm của phương trình vi phân  $x^2y' + xy = 1$ .

(b) Mô tả phần (a) bằng cách vẽ một vài phần tử của họ các nghiệm trên cùng một hệ trục tọa độ.

(c) Tìm một nghiệm của phương trình vi phân thoả mãn điều kiện ban đầu  $y(1) = 2$ .

(d) Tìm một nghiệm của phương trình vi phân thoả mãn điều kiện ban đầu  $y(2) = 1$ .

6. (a) Bạn có thể nói gì về nghiệm của phương trình  $y' = -y^2$  chỉ bằng cách quan sát phương trình vi phân?

(b) Kiểm tra rằng tất cả các phần tử thuộc họ  $y = \frac{1}{x + C}$  là nghiệm của phương trình trong phần (a).

(c) Có thể nghĩ đến một nghiệm của phương trình vi phân  $y' = -y^2$  mà không là một phần tử của họ trong phần (b)?

(d) Tìm một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = -y^2; \quad y(0) = 0,5$$

7. (a) Bạn có nhận xét gì về đồ thị của một nghiệm của phương trình  $y' = xy^3$  khi  $x$  dần về 0? Điều gì xảy ra nếu  $x$  lớn?

(b) Kiểm tra rằng tất cả các phần tử thuộc họ  $y = (c - x^2)^{-\frac{1}{2}}$  là nghiệm của phương trình vi phân  $y' = xy^3$ .

(c) Vẽ một vài phần tử của họ nghiệm trên cùng một hệ trục tọa độ. Các đồ thị xác nhận các dự đoán của bạn ở phần (a) như thế nào?

(d) Tìm một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu  $y' = xy^3, y(0) = 2$ .

8. Số dân của một vùng được mô hình hóa bằng phương trình vi phân

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P \left( 1 - \frac{P}{4200} \right)$$

(a) Với những giá trị nào của  $P$  thì dân số tăng?

(b) Với những giá trị nào của  $P$  thì dân số giảm?

(c) Các nghiệm nào là nghiệm cân bằng của phương trình?

9. Một hàm  $y(t)$  thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

(a) Tìm những nghiệm hằng của phương trình?

(b) Với những giá trị nào của  $y$  thì  $y$  tăng?

(c) Với những giá trị nào của  $y$  thì  $y$  giảm?

## 4.2 Bài tập về trường hướng và phương pháp Euler

### BÀI TẬP

1. (a) Sử dụng phương pháp Euler với mỗi bề rộng bước sau để thiết lập giá trị  $y(0,4)$ , ở đây  $y$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu  $y' = y, y(0) = 1$ .

$$(i) h = 0,4; \quad (ii) h = 0,2; \quad (iii) h = 0,1$$

(b) Chúng ta biết rằng nghiệm chính xác của bài toán giá trị ban đầu trong phần (a) là  $y = e^x$ .

(c) Sai số trong phương pháp Euler là sự chênh lệch giữa giá trị chính xác và giá trị xấp xỉ. Tìm sai số được tạo ra trong phần (a) trong việc sử dụng phương pháp Euler để thiết lập giá trị  $y(0,4)$ , chính là  $e^{0,4}$ . Điều gì xảy ra đối với sai số khi bề rộng bước giảm một nửa?

2. Sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0,5 tính các giá trị  $y_1, y_2, y_3$  và  $y_4$  của nghiệm bài toán giá trị ban đầu  $y' = y - 2x, y(1) = 0$ .

3. Sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0,2 để thiết lập  $y(1)$ , trong đó  $y(x)$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu  $y' = 1 - xy, y(0) = 0$ .

4. Sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0,1 để thiết lập  $y(0,5)$ , trong đó  $y(x)$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu  $y' = y + xy, y(0) = 1$ .

5. (a) Sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0,2 để thiết lập  $y(1,4)$ , trong đó  $y(x)$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu  $y' = x - xy, y(1) = 0$ .

(b) Thay phần (a) với bề rộng bước 0,1.

6. (a) Lập một chương trình tính toán hoặc máy tính đối với phương pháp Euler để tính  $y(1)$ , trong đó  $y(x)$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2, \quad y(0) = 3$$

$$(i) h = 1; (ii) h = 0,1; (iii) h = 0,01; (iv) h = 0,001$$

(b) Kiểm chứng rằng  $y = 2 + e^{-x^3}$  là nghiệm chính xác của phương trình vi phân.

(c) Tìm sai số trong việc sử dụng phương pháp Euler để tính  $y(1)$  với các bề rộng bước trong phần (a). Điều gì xảy ra nếu bề rộng bước chia cho 10?

7. Lập trình hệ thống đại số tính toán của bạn, sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0,01 để tính  $y(2)$  trong đó  $y(x)$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu  $y' = x^3 - y^3; y(0) = 1$ .

8. Cho một đoạn mạch chứa một nguồn điện, một tụ điện với điện dung  $C$  Fara ( $F$ ) và một biến trở với điện trở  $R$  Ôm ( $\Omega$ ), hiệu điện thế giảm khi đi qua điện dung là  $\frac{Q}{C}$  là điện tích (tính bằng culong), khi đó định luật Kirchhoff phát biểu:

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Nhưng  $I = \frac{dQ}{dt}$  nên chúng ta có:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Giả sử điện trở là  $5\Omega$ , điện dung là  $0,05F$  và pin cho một hiệu điện thế hằng là  $60V$ .

a, Vẽ một trường có hướng đối với phương trình vi phân này.

b, Giá trị giới hạn của điện tích là bao nhiêu?

c, Có một nghiệm cân bằng không?

d, Nếu điện tích ban đầu là  $Q(0) = 0C$ , sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0,1 để thiết lập điện tích sau nửa giây.

## 4.3 Bài tập về phương trình vi phân tách biến

### BÀI TẬP

1-8. Giải các phương trình vi phân:

1.  $\frac{dy}{dx} = y^2$ ;    2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2y}}{4y^3}$ ;    3.  $(x^2+1)y' = xy$ ;    4.  $y' = y^2 \sin x$

5.  $(1+\tan y)y' = x^2+1$ ;    6.  $\frac{dy}{d\theta} = \frac{e^y \sin^2 \theta}{y \sec \theta}$ ;    7.  $\frac{du}{dt} = 2+2u+t+tu$ ;    8.  $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

9-14. Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho:

9.  $\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u}$ ,  $u(0) = -5$ ;    10.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + y^2}$ ,  $y(0) = 1$ ;    11.  $x \cos x = (2y + e^{3y})y'$ ,  $y(0) = 0$

12.  $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}$ ,  $P(1) = 2$ ;    13.  $y' \tan x = a + y$ ,  $y(\frac{\pi}{3}) = a$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;    14.  $\frac{dL}{dt} = kL^2 \ln t$ ,  $L(1) = -1$

15. Tìm một phương trình của đường cong thỏa mãn  $\frac{dy}{dt} = 4x^3y$  và  $y$ -chẵn của nó là 7.

16. Tìm một nghiệm của đường cong đi qua điểm  $(1;1)$  và hệ số góc của nó tại  $(x, y)$  là  $\frac{y^2}{x^3}$ .

17. (a) Giải phương trình vi phân  $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ .

(b) Giải bài toán giá trị ban đầu  $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ ,  $y(0) = 0$  và vẽ nghiệm.

(c) Bài toán giá trị ban đầu  $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ ,  $y(0) = 2$  có nghiệm hay không? Giải thích.