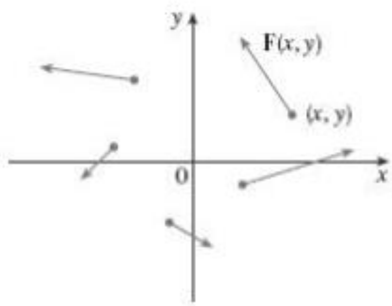
TÌM HIỂU VỀ TRƯỜNG VECTOR

***Định nghĩa 1:** Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$ (tức là một miền phẳng). Một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ là một hàm F gán mỗi một điểm (x, y) thuộc D với một vectơ hai chiều $F(x, y)$ có điểm đặt tại (x, y).

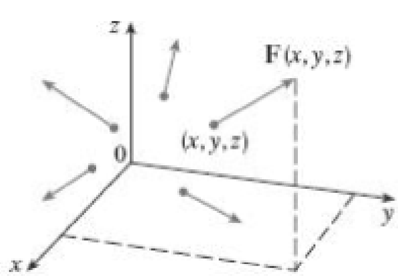


Vì $F(x, y)$ là một vectơ hai chiều nên chúng ta có thể viết $F(x, y)$ qua các hàm thành phần P và Q của nó như sau:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

Chú ý rằng P và Q là các hàm hai biến. Thỉnh thoảng người ta còn gọi là các Trường Vô Hướng để phân biệt với Trường Vectơ.

***Định nghĩa 2**: Cho E là một tập hợp trong $\mathbb{R}^3$. Một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ là một hàm F gán mỗi một điểm (x, y, z) thuộc E với một vectơ ba chiều $F(x, y, z)$ có điểm đặt tại (x, y, z).



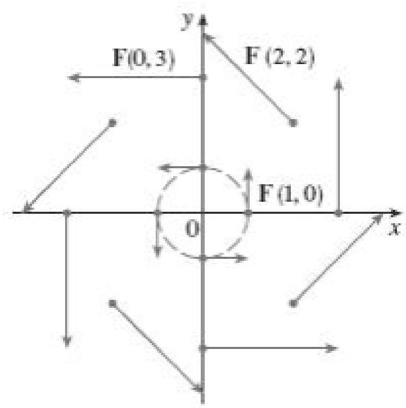
Tương tự như định nghĩa 1, chúng ta có thể viết $F(x, y)$ qua các hàm thành phần P, Q và R của nó như sau:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

* Một trường vectơ được gọi là liên tục khi và chỉ khi các hàm thành phần của nó là liên tục.

Ví dụ: Một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $F(x,y) = -yi + xj$ có một số vectơ $F(x,y)$ như sau:

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$



Trường Gradient:

Cho f là một hàm vô hướng hai biến, khi ấy ta có gradient của f như sau:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Như vậy, bản thân gradient ∇f là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ và được gọi là Trường Gradient.

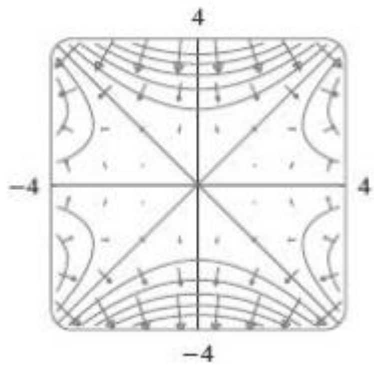
Tương tự như thế, Trường Gradient của một hàm ba biến f được xác định bởi biểu thức:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Ví dụ: Hàm $f(x,y) = x^2y - y^3$ có trường Gradient xác định bởi:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

Ngoài ra chúng ta có thể phác họa một số vectơ của trường này như sau:



* Một Trường vectơ F được gọi là Trường vectơ bảo toàn nếu như nó là gradient của một hàm vô hướng. Nghĩa là tồn tại một hàm vô hướng f sao cho $F = \nabla f$.

Trong trường hợp này chúng ta nói f là một hàm thế vị cho F .

Ví dụ: Với trường vectơ F có dạng:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

Thì F là một Trường vectơ bảo toàn. Vì ta có được hàm f như sau:

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ví dụ: Chứng tỏ rằng trường vector sau đây bảo toàn

$$F(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\,\vec{j} + yx\vec{k}$$