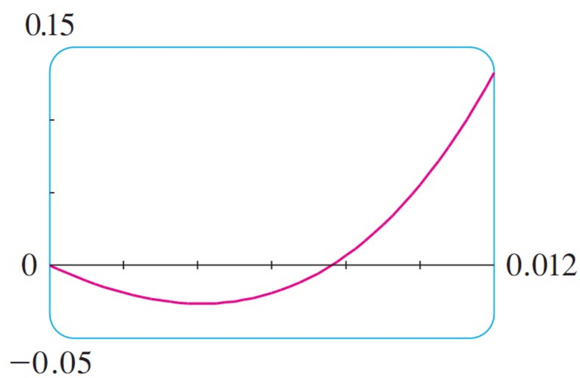
XẤP XỈ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Giả sử rằng một đại lý bán xe cung cấp cho bạn một chiếc xe giá 18.000 đôla hoặc cho bạn trả góp mỗi tháng 375 đô la trong 5 năm. Bạn muốn biết lãi suất hàng tháng đại lý tính phí cho bạn?. Để tìm câu trả lời, bạn phải giải phương trình

$$48x(x+1)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0(1)$$

Làm thế nào để giải phương trình trên?. Ta biết rằng phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn đã có công thức nghiệm, nhưng chỉ có phương trình bậc hai là có công thức nghiệm đơn giản. Nếu là một phương trình bậc năm hoặc cao hơn thì không có công thức tổng quát hoặc nhiều phương trình khác như $\cos x = x$ cũng không có công thức nghiệm.

Tuy nhiên bằng công cụ vẽ đồ thị, ta có được một phần đồ thị của hàm vế trái của (1). Ta có $x = 0$ là một nghiệm, nhưng ta quan tâm xem nghiệm nào trong



khoảng 0,07 đến 0,08. Bằng cách phóng lớn đồ thị ta cũng có thể xấp xỉ 0,076 nhưng công việc này muốn nhanh và chính xác ta có ***phương pháp số*** (Phương pháp **Newton**) tìm nghiệm.

Từ hình vẽ ta có, nghiệm cần tìm là r. Ta bắt đầu với xấp xỉ x_1. Xét tiếp tuyến L của đường cong tại $(x_1, f(x_1))$. L có phương trình

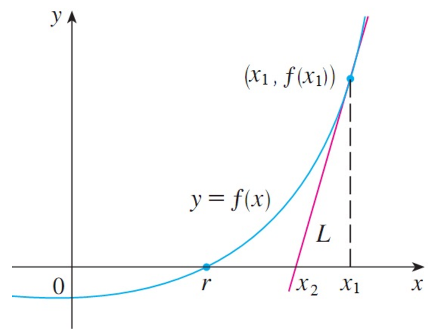
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

L cắt Ox tại $(x_2, 0)$. Vì $(x_2, 0) \in (L)$ nên

$$0 = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ (nếu } f'(x_1) \neq 0)$$

Ta sử dụng x_2 làm xấp xỉ tiếp theo, ta được

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

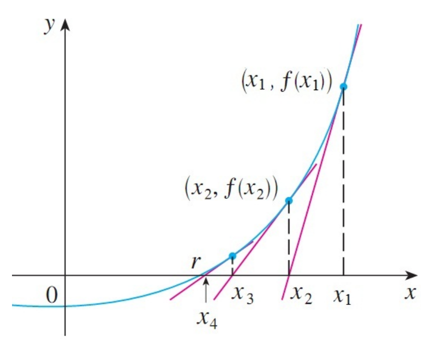


Tổng quát, xấp xỉ thứ n là x_n, $f'(x_n) \neq 0$, thì xấp xỉ tiếp theo là

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Nếu x_n càng tiến tới r khi n càng lớn, khi đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

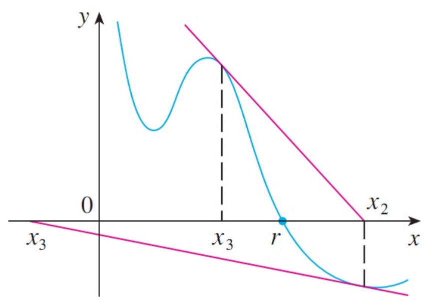


Chú ý. Không phải xấp xỉ bao giờ cũng cho ta kết quả như mong muốn. Chẳng hạn

Ví dụ 0.1. *Tìm xấp xỉ đến x_3 để giải phương trình $x^3 - 2x - 5$ bắt đầu với $x_1 = 2$.*

GIẢI. Áp dụng phương pháp Newton với

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, f'(x) = 3x - 2, x_1 = 2$$



Ta có

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n - 2}$$

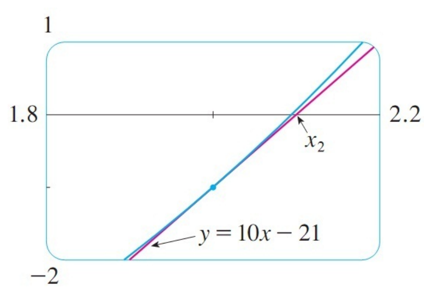
Khi =1 ta có

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1 - 2} = 2 - \frac{-6}{-1} = 2,1$$

Khi =1 ta có

$$x_3 = x_3 - \frac{x_3^3 - 2x_3 - 5}{3x_3 - 2} = 2,0946$$

Vì vậy $x_3 \approx 2,0946$ $\square$



Ví dụ 0.2. *Sử dụng phương pháp Newton tìm $\sqrt[6]{2}$ đúng đến 8 chữ số thập phân.*

Ta chỉ cần tìm x trong phương trình $x^6 - 2 = 0$.
Xét $f(x) = x^6 - 2, f'(x) = 6x^5$, ta có

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Nếu ta chọn $x = 1$ là xấp xỉ ban đầu thì ta có

$$x_2 \approx 1,16666667$$

$$x_3 \approx 1,12246205$$

$$x_4 \approx 1,12246205$$

$$x_5 \approx 1,12249707$$

$$x_6 \approx 1,12644368$$

Vì x_5 và x_6 có 8 chữ số thập phân giống nhau nên

$$\sqrt[6]{2} \approx 1,12246205$$

Ví dụ 0.3. *Tìm nghiệm gần đúng của phương trình* $\cos x = x$*, với độ chính xác đến 6 chữ số thập phân*

GIẢI. Trước hết, ta viết phương trình dưới dạng

$$\cos x - x = 0$$

Ta có $f(x) = \cos x - x$, $f'(x) = -\sin x - 1$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos_n - x_n}{\sin x_n + 1}$$

Ta bắt đầu với $x_1 = 1$, ta có

$$x_2 \approx 0,75036387$$

$$x_3 \approx 0,73911289$$

$$x_4 \approx 0,73908513$$

$$x_5 \approx 0,73908513$$

Vì x_4, x_5 giống nhau ở vị trí thứ 6 nên ta có nghiệm đúng tới 6 chữ số thập phân là $0,739085$ □