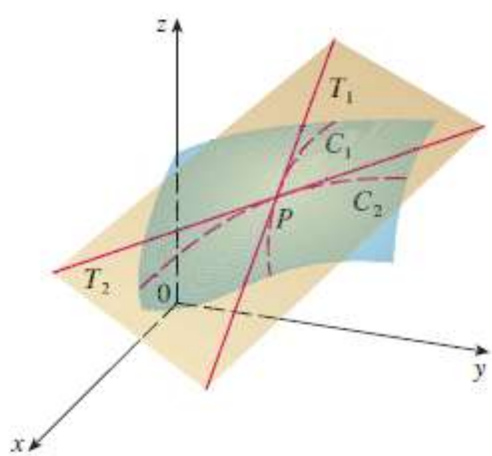
MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VÀ XẤP XỈ TUYẾN TÍNH

1. *Mặt phẳng tiếp xúc*

Giả sử một mặt S có phương trình $z = f(x, y)$, trong đó f có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục. Lấy $P(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm nằm trên S. Gọi C_1 và C_2 là các đường cong nằm trên S, nhận được bằng cách lấy các mặt phẳng đứng $x = x_0$ và $y = y_0$. Khi ấy P nằm trên cả hai đường cong C_1 và C_2. Gọi T_1 và T_2 là các đường thẳng tiếp xúc với C_1 và C_2 tại điểm P. Khi ấy mặt phẳng chứa cả T_1 và T_2 được gọi là mặt phẳng tiếp xúc với mặt S (xem hình vẽ dưới đây)



Bằng cách tính toán đại số chúng ta có được phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt S có phương trình $z = f(x, y)$ tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

2. *Xấp xỉ tuyến tính*

Theo trên chúng ta có phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của một hàm hai biến f tại điểm $(a, b, f(a, b))$ là:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Hàm tuyến tính mà đồ thị là mặt phẳng tiếp xúc này được gọi là Sự tuyến tính của f tại (a,b). Tức là:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Xấp xỉ $f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ được goi là xấp xỉ tuyến tính hay còn goi là xấp xỉ mặt phẳng tiếp xúc của f tại (a,b).

* ***Tính khả vi***:

Giả sử $z = f(x,y)$, và giả sử x thay đổi từ a đến $a+\Delta x$ và y thay đổi từ b đến $b+\Delta y$ khi đó giá trị thay đổi của z tương ứng sẽ là:

$$\Delta z = f(a+\Delta a, b+\Delta b) - f(a,b)$$

Như thế Δz biểu thị giá trị thay đổi của f khi (x,y) thay đổi từ (a,b) đến $(a+\Delta x, b+\Delta y)$.

Ta nói rằng f là một hàm khả vi tại (a,b) nếu như Δz có thể viết được dưới dạng:

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

với $\varepsilon_1 \to 0$ và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

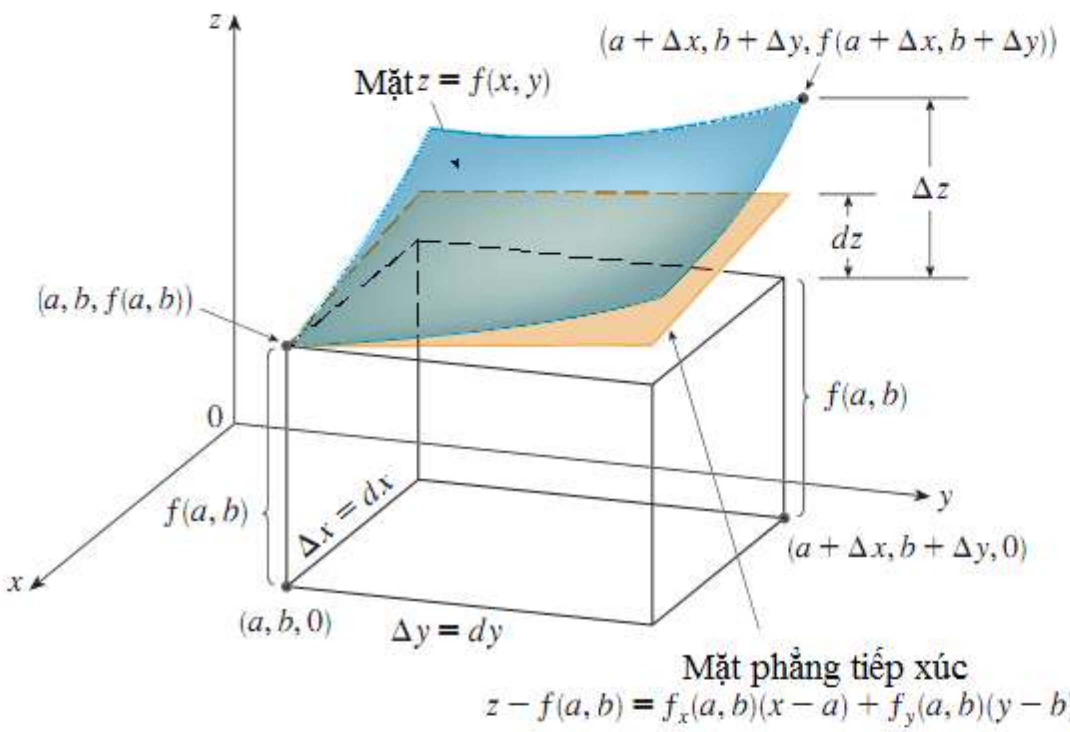
* Định lý: Nếu các đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại trong lân cận của (a,b) và liên tục tại (a,b) thì f là một hàm khả vi tại (a,b).

3. Vi phân

Cho một hàm hai biến khả vi $z = f(x,y)$ khi ấy ta ký hiệu vi phân của f là dz và được xác định bởi:

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Hình vẽ sau đây biểu diễn vi phân dz và giá trị Δz:



Đối với hàm ba biến chúng ta cũng có các công thức tương tự sau:

+. Xấp xỉ tuyến tính:

$$f(x,y,z) \approx f(a,b,c) + f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c)$$

+. Vi phân:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

4. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt tham số

Giả sử mặt tham số S được tạo ra bởi hàm vectơ có phương trình là:

$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$$

Nói cách khác, phương trình tham số của mặt S là:

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v)$$

Gọi P_0 là điểm nằm trên S với vectơ vị trí là $r(u_0, v_0)$. Nếu chúng ta giữ u cố định hằng số và đặt $u = u_0$ thì khi ấy $r(u_0, v)$ sẽ tạo nên đường cong C_v nằm trên S. Khi đó vectơ tiếp xúc với C_v tại P_0 là:

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)k$$

Tương tự, nếu ta cố định v bằng cách đặt $v = v_0$, thì chúng ta sẽ nhận được đường cong C_u nằm trên S và vectơ tiếp xúc tại P_0 là:

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)k$$

Nếu vectơ $r_u \times r_v$ khác vectơ không thì S được goi là một mặt trơn.

Với một mặt trơn, mặt phẳng tiếp xúc chính là mặt phẳng chứa các vectơ r_u và r_v và vectơ $r_u \times r_v$ được goi là vectơ pháp của mặt tiếp xúc.