TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN

Khoa : Khoa học Tự nhiên

Bộ môn : Toán

Giảng viên : ThS.Hồ Xuân Bình

TẬP BÀI TẬP

Môn học : Toán Cao cấp A_2 **Mã môn học :**MTH-104

Số tín chỉ : 3 Trong đó Lý thuyết : 3 Thực hành :1

Dành cho sinh viên ngành :Kỹ thuật

Bậc đào tạo : Đại học

Học kỳ : II- Năm học :2013-2014

Đà Nẵng – 2013

Bài tập chương 1

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ b. $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

c. $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$ d. $z = \frac{1}{2x - x^2 - y^2}$

Câu 2. Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$ b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{2 - \sqrt{xy+4}}$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tgxy}{xy}$ d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{x^2+y^2}}$

Câu 3. Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}$ b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

Câu 4. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số không có giới hạn tại (0,0).

Câu 5. Giả sử rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. Có thể khẳng định gì giá trị của f(3,1)? Điều gì xảy ra nếu f liên tục?

Câu 6. Xác định tập hợp tất cả những điểm tại đó hàm số liên tục

a. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$ b. $f(x,y) = arctg\left(x + \sqrt{y}\right)$

c. $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 - z}$ d. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & ,(\mathrm{x,y}) \neq (0,0) \\ 1 & ,(\mathrm{x,y}) \neq (0,0) \end{cases}$

Câu 7. Tìm điểm gián đoạn của hàm số

a. $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x + y}$ b. $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Câu 8. Tính đạo hàm riêng của các hàm

a. $f(x,y) = 3x - 2y^4$ b. $z = xe^{3y}$

c. $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ d. $z = \mathrm{s\,inxcosy}$

e. $f(x,y) = tg^{-1}(x/y)$ f. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

g. $f(x,y,z) = xy^2 z^3 + 3yz$ h. $u = \ln(x + 2y + 3z)$

Câu 9. Tính đạo hàm riêng tại các điểm tương ứng

a. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f_x(3,4)$

b. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y + z}$, $f_z(3,2,1)$

Câu 10. Tìm tất cả các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm sau

a. $f(x,y) = x^4 - 3x^2 y^3$ b. $z = \dfrac{x}{x + y}$

c. $z = e^{-x}\sin y$

Câu 11. Cho f(x,y) = $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Chứng minh rằng

$$xf_x + yf_y = 2f(x,y)$$

Câu 12. Chứng minh nếu hàm f(x,y) khả vi tại (a,b) thì sẽ liên tục tại đó.

Câu 13. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f_x(0,0), f_y(0,0)$ tồn tại nhưng nó không khả vi tại (0,0).

Câu 14. Sử dụng quy tắc hàm hợp để tìm $\dfrac{dz}{dt}$ hoặc $\dfrac{du}{dt}$

a. $z = \sin x \cos y$, $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$

b. $u = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = \sin t$, $z = \cos t$

Câu 15. Sử dụng quy tắc hàm hợp để tìm $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ hoặc $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

a. $z = x^2 + xy + y^2$, $x = u + v$, $y = uv$

b. $z = e^x \cos y$, $x = uv$, $y = \sqrt{u^2 + v^2}$

Câu 16. Tìm đạo hàm theo hướng của hàm f tại điểm đã cho với hướng tương ứng với góc θ.

$f(x, y) = x^2y^3 - y^4, \quad (2, 1), \quad \theta = \pi/4$

$f(x, y) = ye^{-x}, \quad (0, 4), \quad \theta = 2\pi/3$

$f(x, y) = x \sin(xy), \quad (2, 0), \quad \theta = \pi/3$

Câu 17. Tìm đạo hàm theo hướng của hàm tại điểm đã cho theo hướng v.

$f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}, \quad (3, 4), \quad \mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (2, 1), \quad \mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

$g(p, q) = p^4 - p^2q^3, \quad (2, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$g(r, s) = \tan^{-1}(rs), \quad (1, 2), \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

$f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x, \quad (0, 0, 0), \quad \mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

$f(x, y, z) = \sqrt{xyz}, \quad (3, 2, 6), \quad \mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

$g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}, \quad (1, 1, 2), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Câu 18. Tìm tỉ lệ biến thiên cực đại của hàm tại điểm đã cho và chỉ ra hướng để nó có tỉ lệ biến thiên cực đại.

$f(x, y) = y^2/x, \quad (2, 4)$

$f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}, \quad (0, 0)$

$f(x, y) = \sin(xy), \quad (1, 0)$

$f(x, y, z) = (x + y)/z, \quad (1, 1, -1)$

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3, 6, -2)$

$f(x, y, z) = \tan(x + 2y + 3z), \quad (-5, 1, 1)$

Câu 19. Tìm cực trị các hàm số sau

a. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

b. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

c. $f(x, y) = xy - 2x - y$

d. $f(x,y) = e^x \cos y$

e. $f(x,y) = x \sin y$

f. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

Câu 20. Sử dụng phương pháp bội Lagrange để tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm với điều kiện ràng buộc tương ứng.

$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad xy = 1$

$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$

$f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$

$f(x, y) = e^{xy}; \quad x^3 + y^3 = 16$

$f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$

$f(x, y, z) = 8x - 4z; \quad x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$

$f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

$f(x, y, z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Câu 21. Sử dụng phương pháp bội Lagrange để tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm với hai điều kiện ràng buộc tương ứng.

$f(x, y, z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$

$f(x, y, z) = 3x - y - 3z;$
$x + y - z = 0, \quad x^2 + 2z^2 = 1$

$f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

Bài tập chương 2

Câu 1. Tính tích phân của tích phân

a) $\int_0^1\int_0^{x^2}(x+2y)\mathrm{dydx}$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\varphi} \mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{drd}\varphi$

c) $\int_0^1\int_y^{e^y}\sqrt{\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}dy$

Câu 2. Tính tích phân hai lớp

$$\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

$$\iint_R \cos(x + 2y)\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$$

$$\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -3 \leqslant y \leqslant 3\}$$

$$\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

$$\iint_R x\sin(x + y)\, dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$$

$$\iint_R \frac{x}{1 + xy}\, dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\iint_R xye^{x^2y}\, dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 2]$$

$$\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$$

Câu 3. Tính các tích phân hai lớp

a) $\iint_D x^3y^2dxdy$, D=$\{(x,y)|0 \le x \le 2, -x \le y \le x\}$

b) $\iint_D \frac{2y}{x^2+1}dxdy$, D=$\{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

c) $\iint_D x\cos y dxdy$, D=$\begin{cases} y=0 \\ y=x^2 \\ x=1 \end{cases}$

d) $\iint_D y^3dxdy$, D là miền tam giác với ba đỉnh A(0,2) ; B(1,1); C(3,2).

e) $\iint_D (2x-y)dxdy$,D là hình tròn có tâm trùng với gốc tọa độ và bán kính bằng 2.

Câu 4. Tính thể tích của khối cho bởi

a) Phần nằm dưới parabolid $z = x^2 + y^2$ và nằm trên miền giới hạn $y = x^2$ và $x = y^2$.

b) Phần nằm dưới mặt z = xy và nằm trên miền tam giác ABC với A(1,1), B(4,1), C(1,2).

c) Giới hạn bởi các mặt x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1.

Câu 5. Thay đổi thứ tự lấy tích phân

a) $\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$ b) $\int_0^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dxdy$

c) $\int_0^2\int_0^{\ln x} f(x,y)dxdy$

Câu 6. Tính các tích phân sau bằng cách thay đổi thứ tự lấy tích phân

a) $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}dxdy$ b) $\int_0^3\int_{y^2}^9 y\cos(x^2)dxdy$

c) $\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dxdy$

Câu 7. Tính các tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ cực

a) $\iint\limits_D xydxdy$; với D là hình tròn có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính bằng 3.

b) $\iint\limits_D \cos(x^2 + y^2)dxdy$; với D nữa hình tròn có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính bằng 3.(nằm trên trục ox).

c) $\iint\limits_D \text{arctg}(\frac{y}{x})dxdy$ với $D=\left\{(x,y)|0 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\right\}$

d) $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)dydx$

e) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)dxdy$

Câu 8. Tìm khối lượng và trọng tâm khối lượng của bảng mỏng trên miền D có hàm khối lượng riêng δ.

a) $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\right\}; \delta(x,y) = xy^2$

b) D là miền tam giác ABC với A(0,0), B(2,1), C(0,3) ; $\delta(x,y) = x + y$

c) D là miền giới hạn bởi $y = e^x$, y = 0, x – 0, x = 1 ; $\delta(x,y) = x + y$

Câu 9. Tính tích phân của tích phân

a) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$ b) $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$

Câu 10. Tính tích phân ba lớp

a) $\iiint\limits_E 2xdV$ với $E=\left\{(x,y,z)|0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le z \le y\right\}$

b) $\iiint\limits_E xydV$ với E khối hình tứ diện có bốn đỉnh (0,0,0); (1,0,0); (1,1,0); (0,0,3).

Câu 11. Sử dụng tích phân ba lớp để tính thể tích của khối cho bởi

a) ba mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng 2x + y +z = 4

b) Trụ $x = y^2$ và hai mặt phẳng z = 0, x + z = 1.

Câu 12. Tính các tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ trụ hay tọa độ cầu

a) $\iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ với E là khối giới hạn bởi trụ $x^2 + y^2 = 16$, hai mặt phẳng z = -5, z = 4.

b) $\iiint\limits_E e^z dV$ với E là khối giới hạn bởi $z = 1 + x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 5$, mặt phẳng xy.

c) $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xzdzdy\mathrm{dx}$

d) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xydzdy\mathrm{dx}$

Câu 13. Sử dụng tọa độ cực để tính

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx$$

Câu 14. Sử dụng tọa độ cầu để tính

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$$

Bài tập chương 3

Câu 1. Tìm trường vector gradient của hàm

$f(x, y) = xe^{xy}$

$f(x, y) = \tan(3x - 4y)$

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$f(x, y, z) = x\cos(y/z)$

Câu 2. Xác định trường vector có bảo toàn hay không.Nếu có, tìm hàm f thoả $F = \nabla f$.

a)F(x,y) = (6x+5y)i + (5x+4y)j

b)F(x,y) = (x^3+4xy)i + $(4xy - y^3)$j

Câu 3. Xác định trường vector có bảo toàn hay không. nếu có tìm hàm f thoả $F = \nabla f$

a)F(x,y,z) = yzi + xzj + xyk

b)F(x,y) = $3z^2$i + cosyj + 2xzk

Câu 4. Tính tích phân đường với C là đường cong đã cho

$\int_C y^3\, ds, \quad C: x = t^3,\ y = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$

$\int_C xy\, ds, \quad C: x = t^2,\ y = 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\int_C xyz\, ds,$
$C: x = 2\sin t,\ y = t,\ z = -2\cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$

$\int_C (2x + 9z)\, ds, \quad C: x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\int_C x^2 y\sqrt{z}\, dz, \quad C: x = t^3,\ y = t,\ z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\int_C z\, dx + x\, dy + y\, dz,$
$C: x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

Câu 5. Tính tích phân

$$\int_C xy\, dx + (x - y)\, dy,$$

C chứa đoạn thẳng từ (0,0) đến (2,0) và từ (2,0) đến (3,2).

Câu 6. Tính tích phân

$$\int_C (x + yz)\,dx + 2x\,dy + xyz\,dz,$$

C chứa đoạn thẳng (1,0,1) đến (2,3,1) và từ (2,3,1) đến (2,5,2).

Câu 7. Tính tích phân đường với C là đường cong cho bởi hàm vector r(t)

$\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j},$
$\mathbf{r}(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k},$
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k},$
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k},$
$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

Câu 8- Tìm hàm f sao cho $F = \nabla f$ và sử dụng để tính $\int_C F.dr$ dọc theo đường cong đã cho

$\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j},$
$C\colon\ \mathbf{r}(t) = \langle t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + 2y\arctan x\,\mathbf{j},$
$C\colon\ \mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (x^2 + 3z^2)\,\mathbf{k},$
$C\colon\ x = t^2,\ y = t + 1,\ z = 2t - 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\cos z\,\mathbf{i} + 2xy\cos z\,\mathbf{j} - xy^2\sin z\,\mathbf{k},$
$C\colon\ \mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

$\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + (z + 1)e^z\,\mathbf{k},$
$C\colon\ \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

Câu 9-10 Chỉ ra rằng tích phân không phụ thuộc đường đi và tính giá trị tích phân

9. $\int_C \tan y\, dx + x \sec^2 y\, dy,$

với C là đường bất kì từ (1,0) đến $(2, \frac{\pi}{4})$

10. $\int_C (1 - ye^{-x})\, dx + e^{-x}\, dy,$

với C là đường bất kì từ (0,1) đến $(1,2)$

Câu 11-14. Sử dụng định lý Green tính tích phân đường

11. $\oint_C (x - y)\, dx + (x + y)\, dy,$

C là đường tròn có tâm là gốc toạ độ và bán kính bằng 2.

12. $\oint_C xy\, dx + x^2\, dy,$

C là hình chữ nhật có bốn đỉnh (0,0), (3,0) , (3,1), (0,1)

13. $\oint_C xy\, dx + x^2 y^3\, dy,$

C là tam giác có ba đỉnh (0,0), (1,0), (1,2)

14. $\oint_C x\, dx + y\, dy,$

C bao gồm đường thẳng từ (0,1) đến (0,0) ; từ (0,0) đến (1,0) và (P): $y = 1 - x^2$ từ (1,0) đến (0,1).

Câu 15-20. Sử dụng định lý Green để tính tích phân đường dọc theo một đường cong được định hướng dương đã cho

15. $\int_C xy^2\, dx + 2x^2 y\, dy,$

C là tam giác có ba đỉnh (0,0); (2,2); (2,4)

16. $\int_C \cos y\, dx + x^2 \sin y\, dy,$

C là hình chữ nhật có bốn đỉnh (0,0); (5,0); (5,2); (0,2)

17. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)\, dy,$

C là đường bao bởi miền giao hai Parabol y = x^2 và x = y^2

18. $\int_C xe^{-2x}\, dx + (x^4 + 2x^2y^2)\, dy,$

với C là đường bao giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$

19. $\int_C y^3\, dx - x^3\, dy,$

C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

20. $\int_C \sin y\, dx |+ x \cos y\, dy,$

C là ellipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

Câu 21-23 Sử dụng định lý Green để tính $\int_C F.dr$ (kiểm ta định hướng dương của đường cong trước khi áp dụng định lý).

21. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \right\rangle,$

C bao gồm cung của đường cong y = sinx từ (0,0) đến $(\pi, 0)$ và đoạn thẳng từ $(\pi, 0)$ đến (0,0).

22. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \sin x \rangle,$

C là tam giác từ (0,0) đến (2,6) đến (2,0) đến (0,0)

23. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2y, e^y - xy^2 \rangle,$

C là đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ định hướng ngược chiều kim đồng hồ

Câu 24-30 Tính các tích phân mặt

24. $\iint_S x^2yz\, dS,$

S là phần của mặt phẳng z = 1+2x+3y nằm trên hình chữ nhật [0,3]x[0,2]

25. $\iint_S xy\, dS,$

S là miền tam giác với các đỉnh (1,0,0) (0,2,0) (0,0,2)

26. $\iint_S yz\, dS,$

S là mặt có phương trình tham số

$x = u^2, y = u \sin v, z = u \cos v, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

27. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS,$

S là mặt có phương trình vector

$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + u \sin v\, \mathbf{j} + v\, \mathbf{k}, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi$

28. $\iint_S x^2z^2\, dS,$

S là một phần mặt nó $z = x^2+y^2$ nằm giữa z = 1 và z = 3

29. $\iint_S z\, dS,$

S là mặt $x = y + 2z^2, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$

30. $\iint_S (x^2z + y^2z)\, dS,$

S là chỏm cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geqslant 0$

Câu 31-35 Tính tích phân mặt $\iint_S \ FdS$ với trường vector F và mặt định hướng S đã cho. Đối với mặt đóng, sử dụng định hướng dương ra ngoài.

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k},$

S là phần của parabol z = 4 - x^2 - y^2 nằm trên hình vuông $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ và có định hướng đi lên

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^y\,\mathbf{i} - xze^y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$

S là phần mặt phẳng x +y+z = 1 có định hướng đi xuống trong góc phần tám thứ nhất

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^4\,\mathbf{k},$

S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ở dưới mặt phẳng z = 1 và định hướng đi xuống

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k},$

S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ nằm trong góc phần tám thứ nhất định hướng về phía tâm

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k},$

S là chỏm cầu $x^2+y^2+z^2=25$, $y \geq 0$ định hướng dương theo trục oy.

Câu 36-38 Sử dụng định lý Stocke để tính $\iint_S \ curlF.dS$

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\cos z\,\mathbf{i} + e^x\sin z\,\mathbf{j} + xe^y\,\mathbf{k},$

S là chỏm cầu $x^2+y^2+z^2=9$, $z \geq 0$, hướng lên.

37. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\,\mathbf{i} + y^2z^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k},$

S là phần paraboloid nằm trong hình trụ $x^2+y^2 = 4$, hướng lên.

38. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y^3z\,\mathbf{i} + \sin(xyz)\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k},$

S là phần nón $y^2 = x^2 + z^2$ nằm giữa hai mặt phẳng y = 0 và y = 1 và định hướng dương theo trục dương oy.

Câu 39-41Sử dụng định lý Stocke để tính $\int_C F.dr$ trong mỗi trường hợp C được định hướng dương ngược chiều kim đồng hồ như đã chỉ ra ở trên.

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k},$

C là tam giác với các đỉnh (1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x}\,\mathbf{i} + e^{x}\,\mathbf{j} + e^{z}\,\mathbf{k},$

C là phần giao của mặt phẳng 2x + y +2z = 2 với góc phần tám thứ nhất.

41. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k},$

C là đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, z = 5

Câu 42-45 Sử dụng định lý Divergence tính tích phân mặt $\iint_S F.dS$

42. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x}\sin y\,\mathbf{i} + e^{x}\cos y\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k},$

S là mặt của khối hộp tạo bởi các mặt phẳng x=0, x= 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 2.

43. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + xz^4\,\mathbf{k},$

S là mặt của khối hộp có các đỉnh $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$

44. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^{z}\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k},$

S là mặt của khối tạo bởi $y^2 + z^2 = 1$ và hai mặt phẳng x = -1, x = 2.

45. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\sin z\,\mathbf{i} + \cos(xz)\,\mathbf{j} + y\cos z\,\mathbf{k},$

S là ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Bài tập chương 4

Câu 1. Tìm x, y, z và w, nếu

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

Câu 2. Tính tích các ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Câu 3. Tính A^n với: Ma trận A lần lượt là các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ J & \alpha \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(*Hướng dẫn*: Tính A^2, A^3, … rồi suy ra A^n)

Câu 4. Tìm tất cả các ma trận cấp 2 giao hoán với ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Câu 5. Bằng phương pháp dùng các phép biến đổi sơ cấp, hãy tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\0&1&0&0\\1&1&2&-3\\2&2&4&-5\end{pmatrix}$$

Câu 6. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix}2&1&1\\0&5&-2\\1&-3&4\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}3&-2&-4\\2&5&-1\\0&6&1\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}7&6&5\\1&2&1\\3&-2&1\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}$;

Câu 7. Tính các định thức cấp 4 sau:

a) $\begin{vmatrix}2&1&1&x\\1&2&1&y\\1&1&2&z\\1&1&1&t\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$;

Câu 8. Chứng tỏ rằng các giá trị định thức sau bằng 0.

a) $\begin{vmatrix}ab&a^2+b^2&(a+b)^2\\bc&b^2+c^2&(b+c)^2\\ca&c^2+a^2&(c+a)^2\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}x&p&ax+bp\\y&q&ay+bq\\z&r&az+br\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}a+b&c&1\\b+c&a&1\\c+a&b&1\end{vmatrix}$;

Câu 9. Tính định thức cấp n sau:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\-1&0&3&\dots&n\\-1&-2&0&\dots&n\\ & & & & \\-1&-2&-3&\dots&0\end{vmatrix}.$$

Câu 10. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng phương pháp định thức.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Câu 11. Xác định hạng của các ma trậu sau:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Câu 12. Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$

Câu 13. Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

Câu 14. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad = 7 \\ \qquad x_2 \quad x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 \quad x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

Câu 15. Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

Câu 16. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Xác định trị số k sao cho

i) hệ có một nghiệm duy nhất. ii) hệ không có nghiệm. iii) hệ có vô số nghiệm.

Câu 17. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số k:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

Câu 18. Giải các phương trình ma trận

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ b) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

Câu 19. Giải và biện luận theo tham số m các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m, \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + (m-1)x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 4x_2 + (4m-2)x_3 = -1; \\ 3x_1 + (m+1)x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$