ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Trong toán cao cấp A1 chúng ta đã biết về định lý cơ bản của tích phân một lớp

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Trong đó f(x) là hàm số liên tục và $F'(x) = f(x)$

Trong phần Này chúng ta sẽ tìm hiểu về định lý cơ bản của tích phân đường

Định lý:

Giả sử C là một đường cong trơn cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$. Gọi f là hàm khả vi (2 biến hoặc 3 biến) sao cho vectơ gradient ∇f liên tục trên C. Khi ấy:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Chú ý:

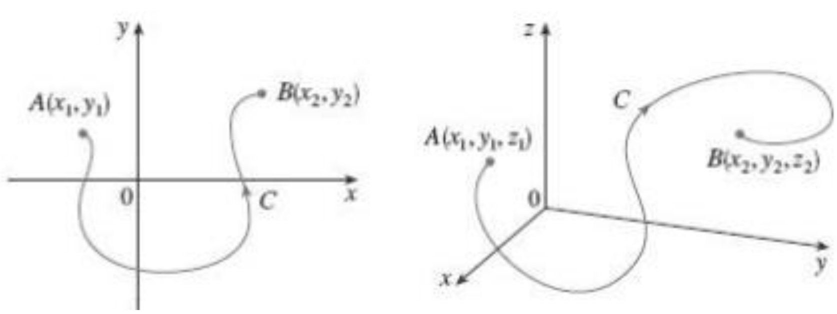
(i). Nếu f là hàm hai biến liên tục và C là đường cong phẳng với điểm đầu là $A(x_1, y_1)$ và điểm cuối $B(x_2, y_2)$ thì ta có:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

(ii). Nếu f là hàm ba biến liên tục và C là đường cong không gian với điểm đầu là $A(x_1, y_1, z_1)$ và điểm cuối $B(x_2, y_2, z_2)$ thì ta có:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Minh họa bằng hình vẽ như sau:



- **Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi**

Giả sử C_1 và C_2 là hai đường cong trơn từng mảnh (chúng ta gọi là đường đi) sao cho có cùng điểm đầu A và điểm cuối B. Khi đó chúng ta sẽ có được:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Nhưng, theo định lý cơ bản của tích phân đường chúng ta có:

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

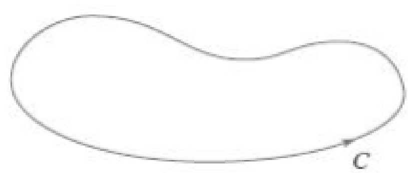
Nói cách khác, tích phân đường của một trường vectơ bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong.

Tổng quát, cho F là một trường vectơ liên tục trên miền D, chúng ta nói tích phân đường $\int\limits_C F.d\,\mathrm{r}$ không phụ thuộc đường đi nếu như

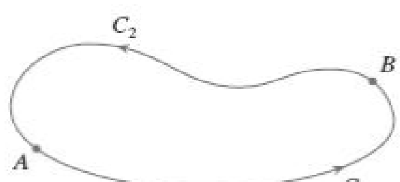
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

với bất kỳ hai đường đi C_1 và C_2 nằm trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối.

Một đường cong được gọi là đường cong đóng nếu như điểm cuối trùng với điểm đầu (xem hình vẽ minh họa)



+. Nếu $\int\limits_C F.d\,\mathrm{r}$ không phụ thuộc vào đường đi trong D và C là một đường đi đóng trong D, thì chúng ta chọn hai điểm A và B trên C và xem C như là hợp của đường đi C_1 từ A đến B và đường đi C_2 từ B đến A (xem hình vẽ minh họa)



Khi ấy ta có:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

+. Đảo lại, nếu $\int\limits_C F.d\,\mathrm{r} = 0$ với C là một đường đi đóng trong D, thì như thế tích phân không phụ thuộc vào đường đi. Thật vậy: lấy hai đường đi bất kỳ C_1 và

C_2 từ A đến B trong D và ta định nghĩa C là đường cong đi theo C_1 và tiếp theo là $-C_2$. Khi ấy ta có:

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Do đó ta có:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Tổng hợp 2 vấn đề được làm sáng tỏ ở trên, chúng ta có định lý sau:

**** Định lý***:

Với mọi đường đi đóng C trong D, tích phân $\int_C F.d\,\mathrm{r}$ không phụ thuộc vào đường đi ở trong D khi và chỉ khi $\int_C F.d\,\mathrm{r} = 0$.

Ví dụ: Cho $F(x,y) = (y^3 + e^x - 2x)i + (3y^2x + 2e^y + 1)\,j$

a) Chứng minh rằng F là trường vector bảo toàn.

b) Tìm một hàm f(x, y) sao cho $\nabla f = F$.

c) Áp dụng định lý cơ bản của tích phân đường để tìm công sinh ra bởi trường lực F khi di chuyển một chất điểm từ M(0,1) đến N(1,1).