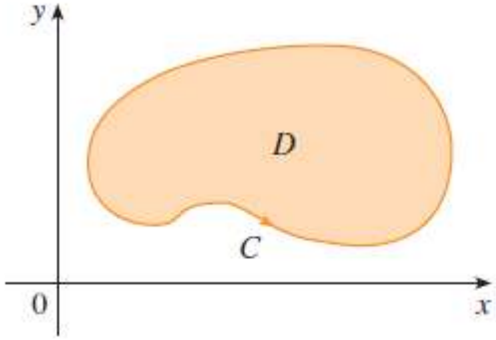
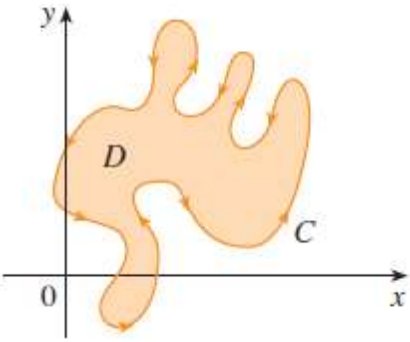
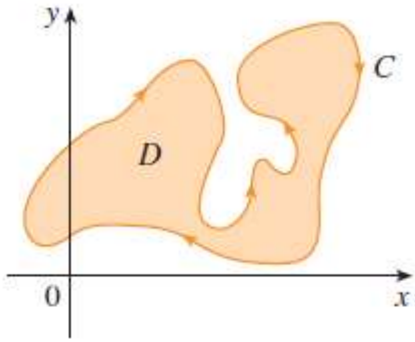
ĐỊNH LÝ GREEN

Định lý Green cho chúng ta một mối quan hệ giữa tích phân đường theo một đường cong đơn đóng với tích phân hai lớp trên miền bị bao bởi đường cong đó.



* Ta goi chiều Dương của một đường cong đơn đóng C là chiều mà khi trên C ta thấy ngược với chiều kim đồng hồ (xem hình dưới đây)





Định lý Green:

Cho C là đường cong phẳng đơn đóng, trơn từng mảnh và được định hướng dương còn D là miền bị chắn bởi C. Nếu P và Q có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa D, thì ta có:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

**** Chứng minh định lý Green**:*

Không dễ dàng cho chúng ta khi chứng minh định lý Green trong trường hợp tổng quát. Chứng minh dưới đây chỉ đưa ra trong trường hợp miền D là miền thuộc Dạng I và Dạng II, chúng đều là những miền đơn.

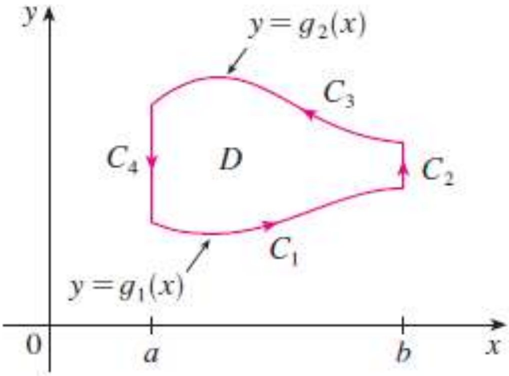
Định lý Green sẽ được chứng minh nếu như chúng ta có thể chứng tỏ được hai kết quả sau đây:

$$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \qquad\qquad \int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

+. Để chứng minh kết quả thứ nhất, chúng ta xét miền D thuộc Dạng I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

Trong đó g_1 và g_2 là các hàm liên tục (xem hình vẽ minh họa)



Với miền D được xét như trên, ta dễ dàng có được:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\, dx$$

Mặt khác khi chia đường cong C thành 4 đường cong như hình vẽ thì chúng ta có được:

$$\int_{C_1} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx$$

$$\int_{C_2} P(x, y)\, dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y)\, dx$$

và

$$\int_{C_3} P(x, y)\, dx = -\int_{-C_3} P(x, y)\, dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\, dx$$

Do đó ta có:

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P(x,y)\,dx + \int_{C_2} P(x,y)\,dx + \int_{C_3} P(x,y)\,dx + \int_{C_4} P(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

Như vậy chúng ta đã chứng minh được:

$$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

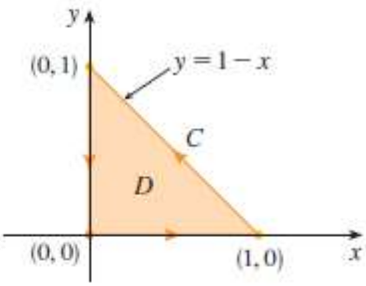
+. Tương tự khi xét D là miền thuộc Dạng II, chúng ta sẽ có được kết quả:

$$\int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

Vậy định lý Green được chứng minh.

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int\limits_C x^4dx + xydy$ với C là chu tuyến dương của tam giác ABC trong đó $A(0,0)$, $B(1,0)$ và $C(0,1)$.

Giải.



Đặt $P(x,y) = x^4; Q(x,y) = xy$

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_1^0 \int_{1-x}^0 (y-0)\,dy\,dx$$

$$= \int_1^0 [\frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=1-x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^0 (1-x)^2\,dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{1+y^4})dy$ với C là đường tròn định hướng dương $x^2 + y^2 = 9$.

Giải.

$$\int_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})dy$$

$$= \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(7x + \sqrt{y^4+1}) - \frac{\partial}{\partial x}(3y - e^{\sin x})]\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (7-3)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\,dr = 36\pi$$

**** Ứng dụng của định lý Green***:

Vì diện tích $A(D)$ của miền phẳng D được tính theo công thức:

$$A(D) = \iint_D dA$$

Do đó, nếu như ta chọn các hàm P và Q thích hợp thì chúng ta có thể tính được diện tích của D thông qua tích phân đường. Cụ thể ta có:

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Ví dụ 3: Tính diện tích của miền phẳng bị chắn bởi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Giải.

$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\sin t)(-a\sin t)\,dt$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

**** Dạng vectơ của định lý Green***:

Giả sử miền phẳng D, biên là đường cong C, các P và Q thỏa mãn giả thiết của định lý Green. Ngoài ra, chúng ta xét $F = P\mathrm{i} + Q\mathrm{j}$. Khi ấy ta có:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Khi chúng ta xem F như là một trường vectơ trên R^3 với thành phần thứ 3 bằng 0 thì chúng ta có:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Suy ra:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Vậy ta viết lại phương trình trong định lý Green theo dạng vectơ như sau:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Nếu C cho bởi phương trình vectơ:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

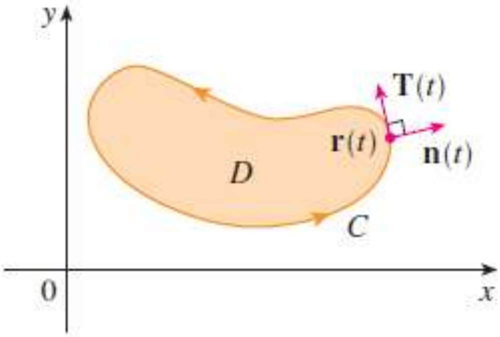
Thì ta có được:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

Do đó:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(xem hình vẽ minh họa dưới đây)



Suy ra chúng ta có:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\,|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\, y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\, x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt - Q(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$= \int_C P\, dy - Q\, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

Vậy ta có được một dạng vectơ khác của định lý Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$