Khái niệm: Phép biến đổi Laplace $\mathcal{L}$ là một quy luật liên kết với hàm $f(t)$ một hàm $F(s)$ xác định bởi

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{1}$$

+) $F(s)$ được gọi là *biến đổi Laplace* của $f(t)$;

+) $f(t)$ là *biến đổi Laplace ngược* của $F(s)$;

Số s có thể là số thực hoặc số phức.

Tính tích phân suy rộng:

Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì*

$$\int_{0-}^{\infty} f(t)dt = F(0), \tag{2}$$

với điều kiện tích phân suy rộng trên hội tụ.

Chú ý rằng, trong (2) có thể thay s bằng một giá trị nào đó để thay thế cho 0.

Ví dụ 1. Tính tích phân suy rộng

$$\int_{0}^{\infty} te^{-3t}\sin t dt.$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace, với $f(t) = te^{-2t}\cos t$, ta có

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

Do đó

$$\int_{0-}^{\infty} te^{-3t}\sin t dt = F(0) = \frac{3}{25}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân suy rộng

$$\int_{0}^{\infty} t^2e^{-4t}\cos 5t dt.$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace với $f(t) = t^2e^{-4t}\cos 5t$, ta có

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{-2(s+4)[25+(s+4)^2]-4(s+4)^2}{[25+(s+4)^2]^3}.$$

Do đó

$$\int_{0}^{\infty} t^2e^{-4t}\cos 5t dt = F(0) = -\frac{368}{68921}.$$