

## 2.1 Bài tập về đạo hàm

1-21. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1.  $f(x) = 2006\pi$

2.  $f(x) = \sqrt{23} + 1$

3.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

4.  $f(x) = 3x^7 - 4x^5 - 4x$

5.  $f(x) = \frac{2}{3}(x^3 - 3x^2 - 6x)$

6.  $f(x) = (2x + 1)(3x + 2)$

7.  $f(x) = 3x^{2.5}$

8.  $y = 3.e^x + 2x$

9.  $y = 3\sqrt{x} - e^{3x}$

10.  $L(t) = 7t^{\frac{5}{5}}$

11.  $V(r) = \frac{4}{5}.\pi.r^3$

12.  $R(t) = \frac{2t - 1}{t^4}$

13.  $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^3$

14.  $y = (2x - 1)\sqrt{x}$

15.  $y = 4^x$

16.  $g(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{3}.x^3$

17.  $f(x) = \frac{x^2 + 5\sqrt{x}}{x}$

18.  $y = \frac{2x^2 - x + 4}{\sqrt{x}}$

19.  $f(v) = \frac{a}{v} + \frac{b}{v^2} + c.e^v$

20.  $V(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$

21.  $u(t) = \sqrt{t^3} + 2\sqrt[3]{t^4}$

22-25. Tìm đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp hai các hàm số sau:

22.  $f(x) = e^x - x^3$

24.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2$

23.  $F(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

25.  $f(x) = x^3 + 3x^{3/2}$

26-39. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

26.  $y = x^3.e^x$

27.  $y = e^x.\sqrt{x}$

28.  $y = \frac{x^e}{e^x}$

29.  $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$

30.  $y = \frac{3x - 2}{3x - 2}$

31.  $y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

32.  $y = e^r.(r^2 - 2r)$

33.  $H(t) = \frac{e^t(1 - 3t^2 + 4t^5)}{t^3}$

34.  $y = \frac{3t^2 - 4t + 1}{t^3 + t}$

35.  $y = \frac{t^4 - 2}{t^4 - 2}$

36.  $f(y) = (y + 2y^3) \left( \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^3} \right)$

37.  $y(s) = \frac{1}{s + k.e^s}$

38.  $y(v) = \frac{3v^3 - 5v.\sqrt{v}}{v}$

39.  $z(w) = w^{3/2}.(w + c.e^w)$

40. Cho  $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ . Tính  $f'(x)$  và  $f''(x)$ .

41. Cho  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ . Tính  $f'(x)$  và  $f''(x)$ .

42. Cho  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ . Tìm  $f^{(n)}(x)$ .

Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$43. y = x^2 \cdot \sin x$$

$$44. g(t) = 4 \sec t + \tan t$$

$$45. y = \sqrt{x} \cdot \cos x$$

$$46. f(t) = t^3 \cdot \cos t$$

$$47. y = \tan t \cdot \sec t$$

$$48. y = (\cos u + cu) \cdot e^u$$

$$49. y = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$50. y = \frac{x \cos x}{1 + \sin x}$$

$$51. y = \frac{1 + \sec x}{\sec x}$$

$$52. y = \frac{\sec x}{\tan x}$$

$$53. y = \csc x \cdot e^x \cdot x$$

$$54. y = \csc x \cdot (x + \cot x)$$

Tính các đạo hàm cấp cao sau:

$$55. \frac{d^{25}}{dx^{25}}(\sin x)$$

$$56. \frac{d^{20}}{dx^{20}}(x \cdot \sin x)$$

57. Tìm  $A$  và  $B$  sao cho hàm số  $y = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$  thỏa mãn biểu thức sau:

$$y'' + y' - 2y = \sin x$$

Tính đạo hàm hàm ẩn:

$$58. x^3 + x^2y + 3y^2 = 2$$

$$59. x^2 - 3xy + y^3 = c$$

$$60. x^2y + yx^2 = 3y$$

$$61. y^4 + x^2y^2 = 1 + y \cdot e^{x^2}$$

68. Cho  $f(x) + x^2 \cdot [f(x)]^3 = 0$  và  $f(1) = 2$ . Tính  $f'(1)$ .

69. Cho  $f(x) + x \cdot \sin g(x) = x^2$ . Tính  $g(0)$  và  $g'(0)$ .

Viết phương trình tiếp tuyến của các đường cong sau tại các tiếp điểm cho trước bằng cách sử dụng đạo hàm của hàm ẩn.

$$70. x^2 + xy + y^2 = 3 \quad (1, 1)$$

$$71. x^2 + 2xy - y^2 + x = 2 \quad (1, 2)$$

$$72. x^2 = y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2 \quad (0, 1/2)$$

$$73. x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (-3\sqrt{3}, 1)$$

$$74. 2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2) \quad (3, 1)$$

$$75. y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5) \quad (0, -2)$$

Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$76. y = \ln \cos x$$

$$77. y = \cos \ln x$$

$$78. y = \ln x^2 + 3x$$

$$79. y = \sqrt[3]{\ln x}$$

$$80. y = \ln \sqrt{x}$$

$$81. y = \log_3(3x - 5)$$

$$82. f(x) = \log_2(x \cdot e^x)$$

$$83. f(x) = \ln x \cdot \sqrt{x}$$

$$84. f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$85. f(x) = \ln \left( \frac{2x + 1}{2x - 3} \right)$$

$$86. h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$87. y = \frac{\ln x}{x + 1}$$

$$88. y = \ln |5x^2 - 2 + 3x|$$

$$89. y = \ln \sqrt{\frac{3x + 1}{3x - 1}}$$

$$90. y = \ln(x^2 \cdot \sin x)$$

$$91. y = [\ln(1 + e^x)]^3$$

$$92. y = \ln(x \cdot e^{-x} + e^{-x})$$

## 2.2 Bài tập về quan hệ giữa các đại lượng biến thiên

1. Một người đàn ông đi bộ về hướng bắc với vận tốc là  $1.2m/s$  từ điểm P. Năm phút sau người phụ nữ bắt đầu đi bộ về hướng nam với vận tốc  $1.6m/s$  từ điểm cách điểm P  $200m$  về phía đông. Hỏi tốc độ của mỗi người đi sau 15 phút sau khi người phụ nữ đi.
2. Hai xe bắt đầu xuất phát từ một điểm. Một xe đi về hướng nam với vận tốc là  $30km/h$  và xe kia đi về hướng tây với vận tốc là  $72km/h$ . Hỏi khoảng cách giữa hai xe tăng với tốc độ như thế nào sau hai giờ?
3. Một đèn pha chiếu sáng vào một bức tường cách  $12m$ . Nếu một người đàn ông cao  $1.8m$  đi bộ từ đèn pha về hướng bức tường với vận tốc là  $1.6m/s$ . Hỏi chiều dài của bóng anh ấy trên bức tường giảm như thế nào khi anh ấy cách ngôi nhà  $4m$ ?
4. Một máy bay bay theo đường ngang ở độ cao  $2km$  so với mặt biển với vận tốc  $800km/h$  ngang qua trạm rada. Hỏi tốc độ khi khoảng cách từ nó đến trạm giảm như thế nào khi nó cách xa trạm  $3km$ .
5. Một đèn đường đặt ở trên điểm cao  $5m$ . Một người đàn ông cao  $2m$  đi bộ ra xa điểm với vận tốc  $1.5m/s$  dọc theo con đường. Hỏi bóng của anh ấy di chuyển như thế nào khi anh ấy cách điểm  $10m$ ?
6. Nếu một hòn tuyết tan ra mà diện tích bề mặt của nó giảm với tốc độ  $1cm^2/min$ , tìm tốc độ của đường kính giảm như thế nào khi đường kính là  $10cm$ .
7. Tại buổi trưa, thuyền A cách thuyền B  $150km$  về hướng tây. Thuyền A đi về hướng đông với vận tốc  $35km/h$  và thuyền B đi về hướng bắc  $25km/h$ . Hỏi khoảng cách giữa các thuyền thay đổi như thế nào vào lúc 4 : 00P.M?
8. Một chất điểm di chuyển dọc theo đường cong  $y = \sqrt{1+x^3}$ . Khi nó tới điểm  $(2, 3)$ , tọa độ y sẽ tăng lên với tốc độ  $4cm/s$ . Hỏi tọa độ x sẽ thay đổi như thế nào tại thời điểm đó?
9. Nếu V là thể tích của hình lập phương với độ dài cạnh là x và hình lập phương dân ra theo thời gian, tìm  $dV/dt$  theo  $dx/dt$ .
10. (a) Nếu A là diện tích của hình tròn với bán kính r và hình tròn này dân ra theo thời gian, tìm  $dA/dt$  theo  $dr/dt$ .  
(b) Giả sử dầu tràn ra từ thùng dầu và tràn ra theo dạng hình tròn. Nếu bán kính của vũng dầu tăng với tốc độ  $1m/s$ , hỏi diện tích của vũng dầu tăng lên với tốc độ bao nhiêu khi bán kính là  $30m$ ?
11. Cạnh của hình vuông tăng lên với tốc độ  $6cm/s$ . Hỏi tốc độ diện tích của hình vuông tăng như thế nào khi diện tích của nó là  $16cm^2$ ?
12. Chiều dài của hình chữ nhật tăng với tốc độ  $8cm/s$  và chiều rộng tăng với vận tốc  $3cm/s$ . Khi chiều dài là  $20$  cm và chiều rộng là  $10$  cm, hỏi diện tích của hình

## 2.3 Bài tập về bài toán tối ưu

### BÀI TẬP

1. Tìm một số dương sao cho tổng của nó với số nghịch đảo là càng nhỏ càng tốt.
2. Tìm hai số dương có tích là 240 và tổng nhỏ nhất.
3. Tìm hai số có hiệu là 180 và tích của chúng là nhỏ nhất.
4. Tìm kích thước của một hình chữ nhật có diện tích  $1200m^2$  và chu vi càng nhỏ càng tốt.
5. Tìm kích thước của một hình chữ nhật có chu vi  $120m$  và diện tích càng lớn càng tốt.
6. Giả sử một tấm nguyên liệu có diện tích  $800m^2$  dùng để làm thành một hình hộp có đáy là hình vuông và không có nắp, tìm thể tích lớn nhất có thể được của hình hộp.
7. Một hình hộp có đáy hình vuông với phần trên trống có thể tích là  $4200m^3$ . Tìm kích thước của hình hộp sao cho tốn ít vật liệu nhất.
8. (a) Chứng minh rằng trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích bằng nhau, thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.  
(b) Chứng minh rằng trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng nhau thì vuông có diện tích lớn nhất.
9. Tìm điểm trên elip  $4x^2 + y^2 = 4$  sao cho khoảng cách từ điểm đó đến điểm  $(0, 1)$  lớn nhất.
10. Tìm (chính xác đến hai số thập phân) tọa độ điểm trên đường cong  $y = \tan x$  gần với điểm  $(1, 1)$  nhất.
11. Một người nông dân có  $750m$  hàng rào và muốn đóng kín thành diện tích hình chữ nhật; sau đó chia làm 4 bãi rào kín với hàng rào song song với một cạnh của hình chữ nhật. Khi nào để tổng diện tích của 4 bãi rào lớn nhất.  
(a) Vẽ vài biểu đồ minh họa các trường hợp, một bãi rào cạn, rộng và bãi rào sâu, hẹp. Tìm tổng diện tích của những hình thể này, trường hợp nào có diện tích lớn nhất? Nếu có, ước lượng trường hợp diện tích lớn nhất đó.  
(b) Vẽ biểu đồ minh họa cho trường hợp tổng quát, viết lời chú thích và gán những kí hiệu trên biểu đồ.  
(c) Xây dựng một biểu thức tính tổng diện tích.  
(d) Dùng những giả thuyết đã cho để xây dựng một phương trình liên quan đến những biến.  
(e) Dùng phần (d) để xây dựng một hàm tổng diện tích là hàm một biến.  
(f) Giải xong bài toán và so sánh với câu trả lời ước lượng ở phần (a).

12. Một cái hộp không có nắp được tạo thành từ một miếng các tông hình vuông có cạnh là  $3m$ , bằng cách cắt 4 góc và gấp nối các cạnh lại. Tìm cách cắt để thể tích cái hộp lớn nhất có thể.

(a) Vẽ một số biểu đồ để minh họa các trường hợp: hộp thấp đáy lớn, hộp cao đáy nhỏ... Tìm thể tích tương ứng của chúng.

(b) Vẽ một biểu đồ minh họa trường hợp tổng quát. Viết lời chú thích và gán các kí hiệu trên biểu đồ.

(c) Viết công thức tính thể tích.

(d) Sử dụng giả thuyết đã cho và tìm một biểu thức liên hệ giữa các biến.

(e) Sử dụng kết quả (d) để xây dựng công thức tính thể tích là hàm một biến.

(f) Giải xong bài toán rồi so sánh với câu trả lời ước lượng ở phần (a).

13. Một container với phần trên trống có thể tích  $12m^3$ . Độ dài của đáy gấp đôi chiều rộng. Vật liệu dùng làm phần đáy có giá là  $15.000\text{Ø}$  trên một mét vuông. Vật liệu dùng làm phần bên có giá là  $9000\text{Ø}$  trên một mét vuông. Tìm chi phí thấp nhất để làm container.

14. Một hình trụ tròn đứng nội tiếp trong một hình cầu có bán kính là  $r$ . Tìm diện tích lớn nhất có thể được của hình trụ.

15. Tìm kích thước của hình chữ nhật sao cho diện tích lớn nhất mà nó có đáy trên trục hoành và hai đỉnh đối nhau một đỉnh nằm trên trục hoành, đỉnh kia nằm trên parabol  $y = 4x^2$

16. Tìm kích thước của hình chữ nhật sao cho nó có diện tích lớn nhất nội tiếp trong một tam giác đều có cạnh là  $L$  nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm trên đáy của tam giác.

## 2.4 Bài tập về quy tắc L'Hospital

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan x}{e^x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{3t} - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{t}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\sec x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1 + 2e^x)}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln x}{x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x - \ln x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sec x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{2x}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x^a - ax + a - 1}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x \sec 7x}{\pi}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^x$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \cdot e^{-x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan 2x)^{2x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3}{x^{1 + \ln x}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \tan \frac{1}{x}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x\right)$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot e^{-x^2}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$$