
Việc tìm cực trị tuyệt đối của hàm số có nhiều ứng dụng thực tế trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống. Trong kinh doanh là bài toán lợi nhuận cực đại và chi phí cực tiểu. Trong du lịch là bài toán thời gian vận chuyển nhỏ nhất. Trong phần này ta nguyên cứu các ứng dụng của đạo hàm trong việc giải quyết các vấn đề thực tế là như diện tích tối đa, số lượng và sản phẩm tối đa, thời gian và giá cả tối thiểu...

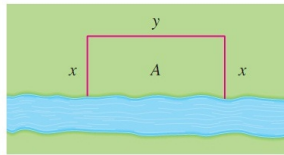
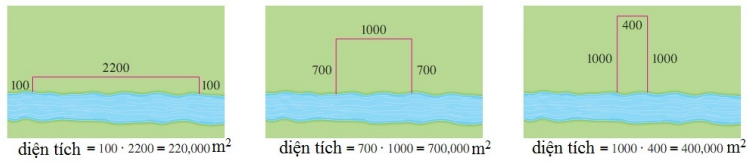
Khó khăn lớn nhất trong việc giải quyết các bài toán trên là chuyển các thông tin của bài toán thực tế về bài toán tối ưu bằng cách đưa ra hàm số để tìm cực đại hay cực tiểu.

- 1) **Hiểu bài toán:** đọc bài toán một cách cẩn thận và hiểu kỹ về nó. Đại lượng nào chưa biết, đại lượng nào đã biết, giả thuyết cho ta điều kiện gì.
- 2) **Vẽ sơ đồ:** Trong hầu hết các bài toán ta thường sử dụng phương pháp vẽ sơ đồ và biểu diễn các đại lượng trên biểu đồ.
- 3) **Giới thiệu các ký hiệu:** Gán ký hiệu cho các đại lượng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (gọi là Q). Ký hiệu $(a, b, c, \dots, x, y, z, \dots)$ cho các đại lượng chưa biết.
- 4) Biểu diễn Q theo các đại lượng ở Bước 3.
- 5) Nếu Q đã biểu thị là một hàm số thì ta sử dụng các các thông tin cho trước để thiết lập mối liên hệ (dưới dạng phương trình) giữa các biến. Sau đó sử dụng các phương trình để khử bớt các biến trong Q . Khi đó Q trở thành một hàm số theo một biến x hay $Q = f(x)$, tìm miền xác định D của f .
- 6) Sử dụng phương pháp tìm cực đại tuyệt đối, cực tiểu tuyệt đối của hàm số f trên miền xác định D .

Ví dụ 0.1. Một nông dân có 2400 mét hàng rào và muốn rào một khung hình chữ nhật trên dòng sông phẳng. Ông ta không rào dọc theo dòng sông. Tính kích thước của chiều dài và chiều sau để được diện tích lớn nhất?

GIẢI.

Đặt x, y lần lượt là chiều rộng và chiều sau của hình chữ nhật. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $Q = xy$.



Vì tổng chiều dài của khung là 2400 m nên

$$2x + y = 2400 \text{ hay } y = 2400 - 2x$$

Như vậy Q là hàm một biến theo x :

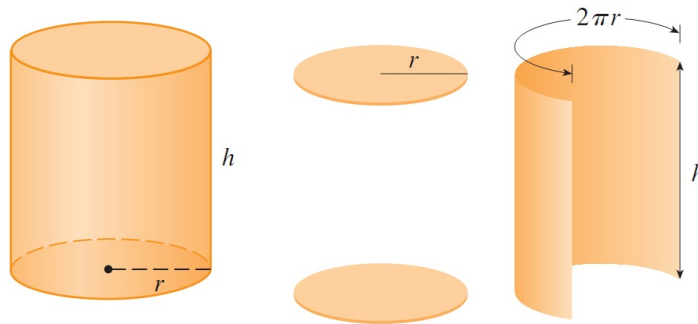
$$Q(x) = x(2400 - x) = 2400x - x^2, 0 \leq x \leq 2400$$

Ta sử dụng phương pháp tìm cực trị tuyệt đối, ta có $Q'(x) = 2400 - 2x$, vì vậy điểm tới hạn $x = \frac{2400}{2} = 1200$.

$Q(0) = 0, Q(600) = 720000, Q(1200) = 0$. Vậy kích thước chiều sau là 600 m và chiều rộng là 1200 m □

Ví dụ 0.2. Một cái can hình trụ được chế tạo để đựng một lít dầu. Tìm kích thước sao cho chi phí nguyên liệu để chế tạo ra cái can là nhỏ nhất.

GIẢI.



Gọi r là bán kính đường đáy, h là chiều cao. (Xem hình vẽ). Chi phí nguyên liệu bé nhất tương đương với diện tích toàn phần bé nhất. Ta có

Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = 2\pi r \cdot h$$

Diện tích một mặt đáy

$$S_d = \pi \cdot r^2$$

Do đó

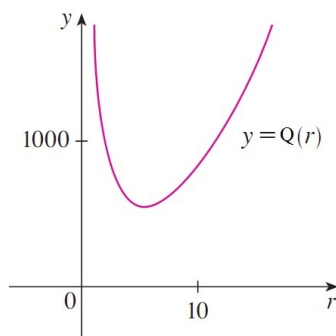
$$Q = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r h$$

Do can hình trụ đựng được 1 lít nên $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$ Khi đó,

$$Q = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ta tìm cực trị tuyệt đối cho hàm

$$Q(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, 0 < r < \infty$$

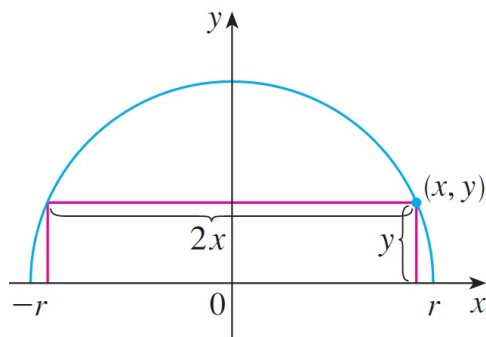


Ta có $Q'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$

$$Q'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Ta có $Q'(r) < 0$ với $r \leq \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ và $Q'(r) > 0$ với $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Do đó Q đạt giá trị nhỏ nhất tại $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, $h = 2r$. □

Ví dụ 0.3. Tìm diện tích của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính r .



GIẢI. Diện tích của hình chữ nhật là $Q = 2xy$, ta có $x^2 + y^2 = r$. Rút $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ vì $r > 0$ thay vào Q ta có

$$Q = 2x\sqrt{r^2 - x^2} \text{ với } 0 \leq x \leq r$$

$$Q'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$Q'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ vì } x \leq 0, Q(0) = Q(r) = 0, Q\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r^2.$$

Do vậy Q đạt lớn nhất tại $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

□

Ví dụ 0.4. Một cửa hàng bán 200 chiếc Iphone trong một tuần với giá 350 đô la mỗi chiếc. Một nhà khảo sát thị trường cho biết nếu giảm 10 đô la mỗi chiếc thì mỗi tuần bán thêm 20 chiếc. Tìm hàm nhu cầu và hàm doanh thu. Cửa hàng cần giảm giá bao nhiêu để doanh thu cao nhất.

GIẢI. Giả sử x là số Iphone bán được trong một tuần. Khi đó số điện thoại tăng thêm là $x - 200$. Mỗi chiếc thêm vào thì giá sẽ giảm

$$\frac{1}{20} \cdot 10 = \frac{10}{20}$$

Do đó, hàm nhu cầu là

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

Hàm doanh thu là

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

Ta có $R'(x) = 450 - x$. Dễ thấy, hàm $R(x)$ đạt cực đại tuyệt đối tại $x = 450$. Do vậy giá cả tương ứng là

$$p(x) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

Và giá phải giảm là $350 - 225 = 125$ đô la mỗi chiếc thì lợi nhuận mới đạt tối ưu. \square