

4.4 Bài tập về ứng dụng của phương trình vi phân

1-4. Tìm quỹ đạo trực giao của họ các đường cong sau:

$$1. x^2 + 2y^2 = k^2; \quad 2. y^2 = kx^3; \quad 3. y = \frac{k}{x}; \quad 4. y = \frac{x}{1 + kx}$$

5. Chúng ta có mô hình phương trình vi phân đo thành tích học tập của sinh viên

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

trong đó $P(t)$ đo thành tích của một người nào đó học kĩ năng sau khoảng thời gian t , M là cấp độ lớn nhất của thành tích và k là một hằng số dương. Giải phương trình vi phân này để tìm một biểu diễn của $P(t)$. Giới hạn của biểu diễn này là bao nhiêu?

6. Trong một phản ứng hóa học cơ bản, các phân tử đơn của hai chất tham gia phản ứng A và B tạo nên một phân tử của chất tạo thành C : $A + B \rightarrow C$. Quy luật tác động khối lượng phát biểu rằng tốc độ phản ứng tỷ lệ với tích của sự cô đối với A và B :

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

Như vậy, nếu điều kiện ban đầu là $[A] = a \text{ mol/L}$ và $[B] = b \text{ mol/L}$ chúng ta viết $x = [C]$ và nhận được

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

(a) Giả sử $a \neq b$, tìm x là một hàm theo t . Sử dụng điều kiện ban đầu của C là 0.

(b) Tìm $x(t)$ trong trường hợp $a = b$. Biểu diễn $x(t)$ như thế nào nếu chúng ta biết $[C] = \frac{1}{2}a$ sau 20 giây.

7. Trong sự phản ánh tương tự bài tập 6, thí nghiệm chỉ ra rằng phương trình

$H_2 + Br_2 = 2HBr$ thỏa mãn quy luật tỉ lệ:

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{1/2}$$

và như vậy đối với phương trình phản ứng này phương trình vi phân trở thành:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)^{1/2}$$

với $x = [HBr]$ và a, b lần lượt là chất ban đầu của Hidro và Brom.

(a) Tìm x là một hàm theo t trong trường hợp $a = b$. Sử dụng điều kiện $x(0) = 0$.

(b) Nếu $a > b$, tìm t như một hàm theo x .

8. Một hình cầu với bán kính $1m$ có nhiệt độ $15^\circ C$. Nó nằm trong một hình cầu đồng tâm bán kính $2m$ và có nhiệt độ $25^\circ C$. Nhiệt độ $T(r)$ tại một điểm cách tâm một khoảng r thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

Nếu $S = \frac{dT}{dr}$, thì S thỏa mãn một phương trình vi phân bậc nhất. Giải nó để tìm một biểu diễn đối với nhiệt độ $T(r)$ nằm giữa hai mặt cầu.

9. Một bình chứa $1000L$ dung dịch nước muối với hàm lượng muối được hòa tan là $15kg$. Cho nước nguyên chất vào bình với tốc độ $10L/phút$. Đồng thời dung dịch được chảy ra từ bình qua một lỗ nhỏ cùng với tốc độ. Tính lượng muối trong bình (a) sau t phút; (b) sau 20 phút.

10. Không khí trong một phòng với thể tích $180m^3$ ban đầu chứa $0,15\%$ khí cacbon-dioxit. Cho không khí với hàm lượng $0,05\%$ cacbon vào phòng với tốc độ $2m^3/min$ và lỗ thoát khí ra ngoài cùng tốc độ. Tìm phần trăm khí cacbon trong phòng bằng một hàm theo thời gian. Điều gì xảy ra sau một khoảng thời gian dài?

11. Một thùng với $20L$ bia chứa hàm lượng cồn 40% (đo bằng vol). Bia với hàm lượng cồn 6% được cho vào bình với tốc độ $20L/phút$ và hỗn hợp được bơm ra ngoài với cùng tốc độ. Tìm phần trăm cồn sau một giờ đồng hồ?

12. Một bình chứa $1000L$ nước nguyên chất. Nước biển chứa hàm lượng muối $0,05kg$ muối trên một lít nước được cho vào bình với tốc độ $5L/phút$. Nước biển chứa hàm lượng muối $0,04kg$ trên một lít nước được cho vào bình với tốc độ $10L/phút$. Hỗn hợp được trộn đều đồng thời cho thoát ra khỏi bình với tốc độ $15L/phút$. Tính