

5.5 Bài tập về chuỗi lũy thừa

BÀI TẬP

1. (a) Khái niệm chuỗi lũy thừa?

(b) Khái niệm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa? Làm thế nào để tìm nó?

(c) Khái niệm miền hội tụ của một chuỗi lũy thừa? Làm thế nào để tìm nó?

2-15. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi.

$$\begin{array}{llll} 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}; & 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3} \\ 6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; & 7. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}; & 8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}; & 9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 2^n} \\ 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}; & 11. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)}; & 12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}; & 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n \\ 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}; & 15. \sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n & & \end{array}$$

16. Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ hội tụ, nó có chỉ ra rằng các chuỗi sau hội tụ hay không?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2)^n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-4)^n$$

17. Giả sử chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hội tụ khi $x = -4$ và phân kỳ khi $x = 6$. Chúng ta có thể nói gì về tính hội tụ, phân kỳ của các chuỗi sau?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n; \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$$

18. Với k là một số nguyên dương, tìm bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

19. Hàm J_1 được xác định bởi:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

được gọi là hàm Bessel cấp 1.

(a) Tìm tập xác định của hàm.

(b) Vẽ một vài phần tử đầu của các tổng riêng trên cùng một hệ trục.

20. Một hàm A được xác định:

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots$$

được gọi là hàm Airy được tìm thấy bởi nhà toán học và thiên văn học Sir George Airy (1801-1892).

(a) Tìm tập xác định của hàm Airy.

(b) Vẽ một vài phần tử đầu của các tổng riêng $s_n(x)$ trên cùng một hệ trục.

21. Một hàm f được xác định bởi:

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 = x^4 + \dots$$

nghĩa là, các hệ số là $c_{2n} = 1$ và $c_{2n+1} = 2$ với mọi $n \geq 0$. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi và công thức chính xác của $f(x)$.

22. Nếu $f(x) = \sum c_n x^n$ có bán kính hội tụ 2 và chuỗi $\sum d_n x^n$ có bán kính hội tụ 2. Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum (a_n + d_n) x^n$ bằng bao nhiêu?

23. Giả sử rằng bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum c_n x^n$ là R . Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum c_n x^{2n}$ bằng bao nhiêu?

5.6 Bài tập về chuỗi lũy thừa (tt)

BÀI TẬP

1-8. Tìm chuỗi lũy thừa biểu diễn đối với hàm và xác định khoảng hội tụ.

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$; 2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$; 3. $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$; 4. $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$

5. $f(x) = \frac{1}{x-5}$; 6. $f(x) = \frac{x}{4x+1}$; 7. $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$; 8. $f(x) = \frac{x^2}{a^3-x^3}$

9. (a) Sử dụng đạo hàm để tìm một chuỗi lũy thừa biểu diễn $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

(b) Sử dụng (a) tìm một chuỗi lũy thừa đối với $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$.

(b) Sử dụng (b) tìm một chuỗi lũy thừa đối với $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$.

10. (a) Tìm một chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Bán kính hội tụ của nó bằng bao nhiêu?

(b) Sử dụng phần (a) để tìm một chuỗi lũy thừa đối với $f(x) = x \ln(1+x)$.

(c) Sử dụng phần (a) để tìm một chuỗi lũy thừa đối với $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

11-14. Tìm một chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm và xác định bán kính hội tụ:

11. $f(x) = \ln(5-x)$; 12. $f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$; 13. $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$; 14. $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

15-18. Tìm một chuỗi lũy thừa biểu diễn đối với f , vẽ f và một vài phần tử tổng riêng $s_n(x)$ trên cùng một hệ trục. Điều gì xảy ra khi n tăng?

15. $f(x) = \ln(3+x)$; 16. $f(x) = \frac{1}{x^2+25}$; 17. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; 18. $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

19-22. Xác định tích phân bất định bằng một chuỗi lũy thừa. Bán kính hội tụ của nó là bao nhiêu?

19. $\int \frac{t}{1+t^8} dt$; 20. $\int \frac{\ln(1-t)}{t} dt$; 21. $\int \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} dx$; 22. $\int \tan^{-1}(x^2) dx$

23-26. Sử dụng chuỗi lũy thừa để xấp xỉ tích phân, xác định sai số đến sáu chữ số thập phân.

$$23. \int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5} dx; \quad 24. \int_0^{0,4} \ln(1+x^4) dx; \quad 25. \int_0^{0,3} \frac{x^2}{1+x^4} dx; \quad 26. \int_0^{0,1} x \cdot \arctan(3x) dx$$

27. Sử dụng kết quả của Ví dụ 2.6.6 để tính $\ln 1,1$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

28. Chỉ ra rằng hàm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

là nghiệm của phương trình vi phân $f''(x) + f(x) = 0$.

29. (a) Bắt đầu với chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$; $|x| < 1$.

(b) Tìm tổng của các chuỗi sau:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

(c) Tìm tổng của mỗi chuỗi sau:

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1; \quad (ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}; \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

30. Sử dụng chuỗi lũy thừa đối với $\tan^{-1} x$ để chứng minh biểu diễn sau của π bằng tổng của một chuỗi vô hạn:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

31-42. Sử dụng định nghĩa một chuỗi Maclaurin tìm chuỗi Maclaurin của hàm $f(x)$ (Giả sử f có một biểu diễn chuỗi lũy thừa. Không cần chỉ ra $R_n(x) \rightarrow 0$). Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

$$\begin{array}{lll} 31. f(x) = \cos x; & 32. f(x) = \cos x, \quad a = \pi; & 33. f(x) = (1+x)^{-3}; \\ 34. f(x) = \ln(1+x); & 35. f(x) = \sin 2x; & 36. f(x) = x^3, \quad a = -1; \\ 37. f(x) = e^x, \quad a = 3; & 38. f(x) = \ln x, \quad a = 2; & 39. f(x) = 1+x+x^2, \quad a = 2; \\ 40. f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{2}; & 41. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad a = 9; & 42. f(x) = x^{-2}, \quad a = 1. \end{array}$$

43-50. Sử dụng các chuỗi Maclaurin của các hàm đơn giản (trong các Ví dụ) để

tìm chuỗi Maclaurin của hàm tương ứng.

$$43. f(x) = \cos \pi x; \quad 44. f(x) = e^{-\frac{x}{2}}; \quad 45. f(x) = x \tan^{-1} x; \quad 46. f(x) = \sin(x^4)$$
$$47. f(x) = x^2 e^{-x}; \quad 48. f(x) = x \cos 2x; \quad 49. f(x) = \sin^2 x$$

$$50. f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ \frac{1}{6}, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

51-54. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm f (bằng bất kỳ phương pháp nào) và bán kính hội tụ của nó.

$$51. f(x) = \sqrt{1+x}; \quad 52. f(x) = e^{-x^2} + \cos x; \quad 53. f(x) = \cos(x^2); \quad 54. f(x) = 2^x$$

55. Sử dụng chuỗi Maclaurin của e^x để tính $e^{-0,2}$ chính xác đến năm chữ số thập phân.

56. Sử dụng chuỗi Maclaurin của $\sin x$ để tính $\sin 3^\circ$ chính xác đến năm chữ số thập phân.

57-60. Biểu diễn tích phân xác định bằng một chuỗi lũy thừa.

$$57. \int x \cos(x^3) dx; \quad 58. \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad 59. \int \sqrt{x^3 + 1} dx; \quad 60. \int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

61-64. Sử dụng lý thuyết chuỗi để xấp xỉ tích phân xác định với độ chính xác được chỉ ra tương ứng.

$$61. \int_0^1 \sin(x^2) dx \text{ (ba chữ số thập phân);} \quad 62. \int_0^{0,5} \cos(x^2) dx \text{ (ba chữ số thập phân);}$$

$$63. \int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} dx \text{ (|sai số| < } 10^{-8}\text{);} \quad 64. \int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx \text{ (|sai số| < } 0,001\text{).}$$

65-67. Sử dụng chuỗi để tính giới hạn:

$$65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}; \quad 66. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}; \quad 67. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

68-71. Sử dụng phép nhân hoặc phép chia để tìm ba phần tử khác không đầu tiên trong chuỗi Maclaurin của các hàm.

$$68. y = e^{-x^2} \cos x; \quad 69. y = \sec x; \quad 70. y = \frac{x}{\sin x}; \quad 71. y = e^x \ln(1-x)$$

72-77. Tìm tổng của các chuỗi:

$$\begin{array}{lll} 72. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}; & 73. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!} & 74. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1} (2n+1)!}; \\ 75. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n \cdot n!}; & 76. 3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \dots; & 77. 1 - \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} - \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots \end{array}$$