Tích phân mặt loại 1

Nếu như tích phân đường cho chúng ta mối liên hệ giữa tích phân đường với độ dài cung, thì trong phần này chúng ta sẽ thấy được mối liên hệ giữa tích phân mặt với diện tích mặt. Trong toàn bộ phần này, chúng ta xét f là một hàm ba biến có miền xác định chứa mặt S.

Sau khi đã định nghĩa tích phân mặt, chúng ta xét trường hợp đặc biệt với $f(x, y, z) = 1$ thì tích phân mặt chính là diện tích mặt của S.

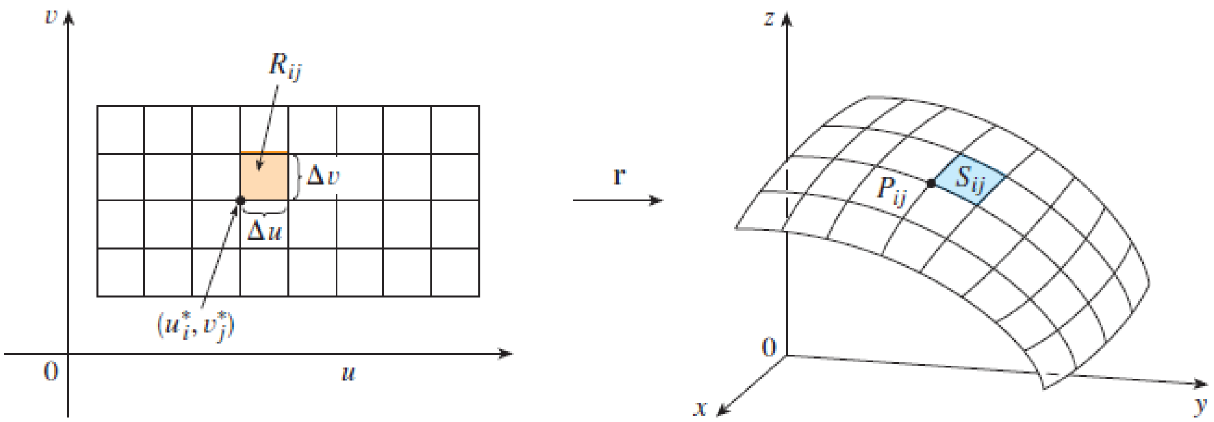
3.5.1. Trường hợp Mặt tham số

Giả sử mặt S cho bởi hàm vectơ xác định trên một miền tham số D thuộc mặt phẳng uv:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

Để đơn giản trong định nghĩa, chúng ta xét D là một miền hình chữ nhật.

+. Chúng ta chia miền D thành các hình chữ nhật con R_{ij} với các cạnh là Δu và Δv. Khi ấy mặt S sẽ được chia thành các mảnh nhỏ S_{ij} tương ứng, với diện tích mỗi mảnh là ΔS_{ij} (xem hình vẽ minh họa dưới đây



+. Chúng ta tính giá trị của f tại điểm P_{ij}^* và lập tổng:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij}$$

+. Chúng ta lấy giới hạn khi số các mảnh chia S_{ij} càng lớn thì giới hạn đó (nếu tồn tại) được gọi là tích phân mặt của f trên mặt S. Cụ thể ta có:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

Mặt khác chúng ta có được biểu thức xấp xỉ sau:

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\ \Delta v$$

Trong đó:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Do đó tích phân mặt được tính bởi công thức sau:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

Trong trường hợp đặc biệt $f(x,y,z)=1$ thì ta có:

$$\iint_S 1\,dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA = A(S)$$

Ví dụ 1: Tính tích phân mặt $\iint_S x^2 dS$ trong đó S là mặt cầu đơn vị có phương trình cho bởi $x^2+y^2+z^2=1$.

Giải.

$$x = \sin\phi\cos\theta,\ y = \sin\phi\sin\theta,\ z = \cos\ 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sin\phi$$

$$I = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{2\pi}[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$

* Một ứng dụng của tích phân mặt là nếu ta xét một bản mỏng có dạng như mặt S và có được mật độ tại điểm (x,y,z) là $\rho(x,y,z)$. Khi đó ta có khối lượng của S:

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,dS$$

Và tọa độ của trọng tâm được xác định bởi:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)\, dS$$

3.5.2. Trường hợp Mặt là đồ thị của hàm

Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x,y)$ khi ấy ta xem x và y như là các tham số thì ta có các phương trình tham số của mặt S là:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Do đó:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Suy ra:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Do vậy:

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Suy ra: $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA.$

* Công thức hoàn toàn tương tự khi mặt S có phương trình $y = h(x,z)$, trong trường hợp này D nằm trong mặt phẳng xz và chính là hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng này:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

Ví dụ 2: Tính tích phân mặt $\displaystyle\iint_S ydS$ trong đó S là mặt có phương trình cho bởi $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 2$.

Giải.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$$\iint_S y\,dS = \iint_D y\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\;dA$$

$$= \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1+1+4y^2}\;dy\,dx$$

$$= \int_0^1 dx\,\sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}\;dy$$

$$= \sqrt{2}(\frac{1}{4})\frac{2}{3}(1+2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$