XẤP XỈ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Trong một số bài toán ta không thể tính chính xác giá trị của tích phân được do việc tìm nguyên hàm của hàm f rất khó hoặc tìm được nhưng nguyên hàm không đẹp hoặc bài toán xuất phát các hàm số xây dựng từ các dữ liệu thu thập được của một số nhà khoa học, có thể không xác định được công thức của hàm số đó. Khi đó, việc tính chính xác giá trị của tích phân là rất khó khăn, thậm chí không thể tính được. Ví dụ, ta không thể tính chính xác giá trị của các tích phân

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}dx, \qquad \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}dx$$

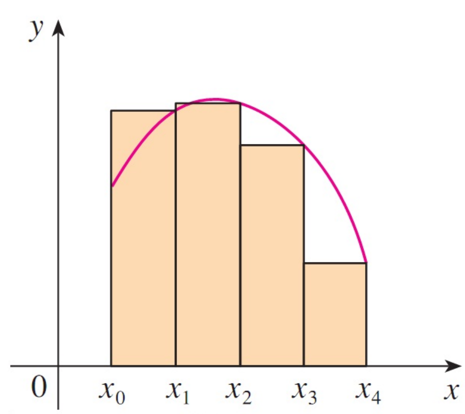
Tuy nhiên, chúng ta có thể tìm giá trị gần đúng của các tích phân trên bằng cách dựa vào tổng ***Riemann***.

Chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

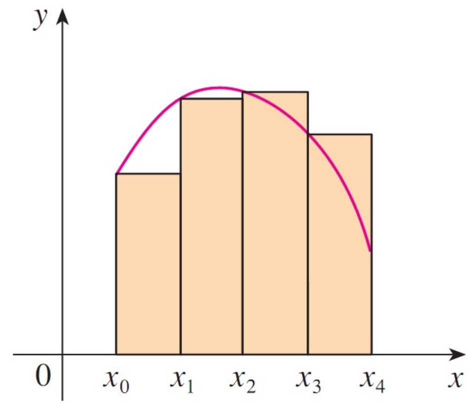
Trong đó x_i^* là điểm bất kỳ trong khoảng thứ $i[x_{i-1}, x_i]$. Nếu x_i^* được chọn là điểm mút trái của khoảng thì $x_i^* = x_{i-1}$ và ta có **xấp xỉ đầu mút phải**

$$\int_a^b f(x)dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \qquad (1)$$



Nếu x_i^* được chọn là điểm mút phải của khoảng thì $x_i^* = x_i$ và ta có **xấp xỉ đầu mút trái**

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \qquad (2)$$



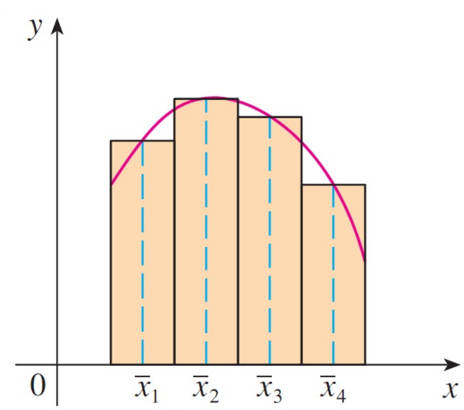
0.0.1. Quy tắc trung điểm

Nếu ta chọn x^* là trung điểm của đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ ta có **quy tắc xấp xỉ trung điểm**

QUY TẮC TRUNG ĐIỂM

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x[f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + ... + f(\overline{x}_n)]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $\overline{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ hay $\overline{x}_i$ là trung điểm của đoạn $[x_{i-1}, x_i]$

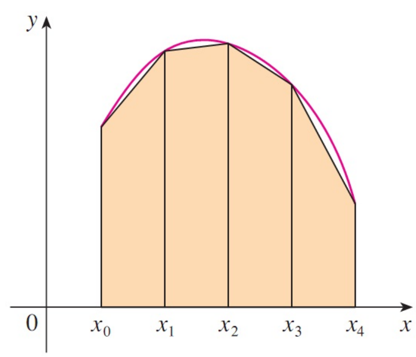


Một quy tắc khác để xấp xỉ gọi là quy tắc hình thang, tức là ta lấy trung bình xấp xỉ trong công thức (1) và (2) ta có

0.0.2. Quy tắc hình thang

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n \approx \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}^*)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x]$$
$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $x_i = a + i\Delta x$.



Ví dụ 0.1. *Sử dụng quy tắc trung điểm và quy tắc hình thang để tính xấp xỉ*

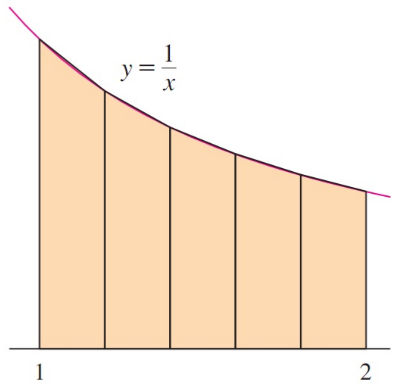
$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \text{ với } n = 5$$

GIẢI.

a) Với $n = 5$, $a = 1, b = 2$, ta có $\Delta x = \dfrac{2-1}{5} = \dfrac{1}{5} = 0,2$. Các trung điểm của 5 khoảng là $1,1; 1,3; 1,5; 1,7$ và $1,9$. Áp dụng xấp xỉ trung điểm, ta có

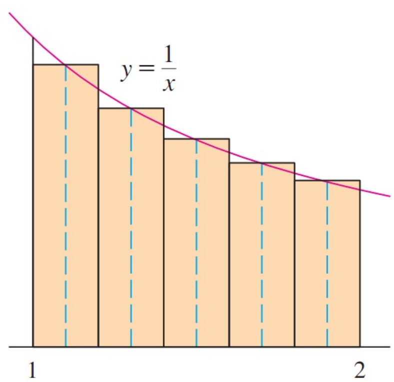
$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x}dx &\approx \Delta x[f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)] \\ &= \frac{1}{5}[\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9}] \\ &\approx 0,691908 \end{aligned}$$

b) Với $n = 5$, $a = 1, b = 2$, ta có $\Delta x = \dfrac{2-1}{5} = \dfrac{1}{5} = 0,2$. Các điểm chọn của 5



khoảng là $1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$ và 2. Áp dụng xấp xỉ hình thang, ta có:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx &\approx \frac{\Delta x}{2}[f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\
&= \frac{0,2}{2}[\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2}] \\
&\approx 0,695635
\end{aligned}$$



□

Nếu sử dụng định lý cơ bản thì ta có

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 \\
\approx 0.693147
\end{aligned}$$

So sánh với xấp xỉ hình thang với $n = 5$, ta có sai số $E_T \approx 0,002488$ và xấp xỉ trung điểm sai số là $E_M \approx 0,001239$

Tổng quát, ta có

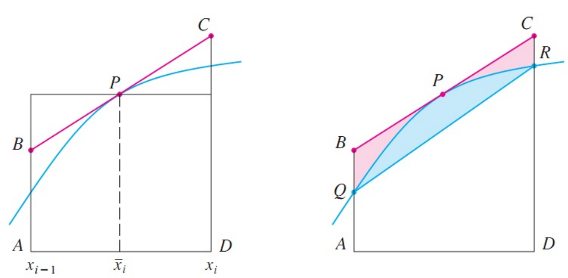
$$E_T = \int_a^b f(x)dx - T_n \quad \text{và} \quad E_M = \int_a^b f(x)dx - M_n$$

Sau đây là bảng kết quả cho việc tính toán trong ví dụ 0.1 trong các trường hợp n khác nhau

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

0.0.3. Biên độ sai số



Giả sử $|f''(x)| \leq K$ với $a \leq x \leq b$. Nếu E_T và E_M là sai số xấp xỉ hình thang và xấp xỉ trung điểm thì

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \text{ và} |E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Áp dụng sự đánh giá trên cho quy tắc hình thang trong ví dụ 0.1, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ và $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Vì $1 \leq x \leq 2$ nên

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leq \frac{2}{1^3} \leq 2$$

Bởi vậy, với $K = 2$, $a = 1, b = 2$ và $n = 5$ ta có

$$|E_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12.5^2} = \frac{1}{150} \approx 0,006667$$

Ví dụ 0.2. *Cần cho n lớn đến bao nhiêu để phép tính xấp xỉ theo quy tắc hình thang và quy tắc trung điểm của tích phân* $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ *chính xác trong phạm vi* $0,0001$.

Trong phép tính trên, ta có $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. Vì $1 \leq x \leq 2$ nên

$$\left|f''(x)\right| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leq \frac{2}{1^3} \leq 2$$

Bởi vậy, với $K = 2$, $a = 1, b = 2$, với sai số không vượt quá $0,0001$ ta có

$$E_T \leq \frac{2(2-1)^3}{12.n^2} < 0,0001$$

Giải bất phương trình trên ta có

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)} \text{ hay } n > \frac{1}{\sqrt{0,0006}} \approx 40,8$$

Do vậy $n = 41$
Tương tự đối với quy tắc trung điểm, chọn n thoả mãn

$$\frac{2(1)^3}{24n} < 0,0001 \text{ hay } n > \frac{1}{\sqrt{0,0012}} \approx 29$$

Vậy $n = 29$.

0.0.4. Quy tắc Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và n là số chẵn.

Ví dụ 0.3. *Sử dụng quy tắc Simpson để tính xấp xỉ* $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ *với* $n = 10$.

GIẢI. Đặt $f(x) = \frac{1}{n}, n = 10$ và $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$, ta có

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}dx &\approx S_{10}\\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1,1) + 2f(1,2) + ... + 2f(1,8) + 4f(1,9) + f(2)]\\ &= \frac{0,1}{3}[\frac{1}{1} + \frac{4}{1,1} + \frac{2}{1,3} + \frac{1}{1} + \frac{4}{1,1} + \frac{2}{1,3}]\\ &\approx 0,69315\end{aligned}$$

□

Biên độ sai số Simpson Giả sử $f^{(4)}(x) \leq K$ với mọi $a \leq x \leq b$. Nếu E_S là sai số tương ứng của Quy tắc Simpson thì

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

Ví dụ 0.4. *Cần cho n lớn đến bao nhiêu để phép tính xấp xỉ sau theo Quy tắc Simpson tích phân chính xác đến* $0,0001$

GIẢI. Đặt $f(x) = \frac{1}{x}$, $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$. Vì $x \geq 1$ nên $\frac{1}{x} \leq 1$ và $|f^{(4)}(x)| = |\frac{24}{x^5}| \leq 24$. Do vậy

$$\frac{24.1^5}{180n^4} < 0,0001$$

suy ra

$$n^2 > \frac{24}{180(0,0001)} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{0,00075}} \approx 6,04$$

Vậy n=8 vì n là số chẵn. □