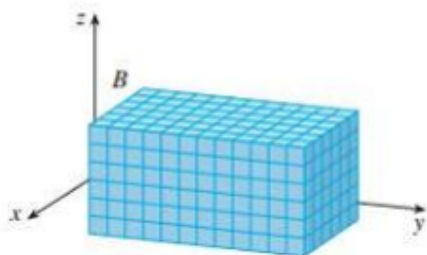


Cho khối hộp chữ nhật B



$$\boxed{1} \quad B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Ta chia hình hộp B thành các hình hộp con. Cụ thể, ta chia khoảng  $[a, b]$  thành  $l$  khoảng nhỏ  $[x_{i-1}, x_i]$  có độ dài bằng nhau  $\Delta x = (b - a) / l$ , chia khoảng  $[c, d]$  thành  $m$  khoảng nhỏ  $[y_{j-1}, y_j]$  có độ dài bằng nhau  $\Delta y = (d - c) / m$  và chia khoảng  $[r, s]$  thành  $n$  khoảng nhỏ  $[z_{k-1}, z_k]$  có độ dài bằng nhau  $\Delta z = (s - r) / n$ . Sau đó kẻ các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ, như thế ta đã chia hình hộp B thành  $lmn$  hình hộp con:

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

Mỗi một hình hộp con ở trên sẽ có thể tích là:  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Trên mỗi hình hộp con  $B_{ijk}$  ta chọn một điểm mẫu  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ . Khi ấy ta có

được tổng Riemann là:

$$\boxed{2} \quad \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

Tương tự như tích phân 2 lớp, chúng ta định nghĩa tích phân 3 lớp như là giới hạn của tổng Riemann (khi giới hạn này tồn tại):

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

**\* Định lý Fubini cho tích phân 3 lớp:**

Nếu  $f$  là một hàm liên tục trên một hình hộp chữ nhật

$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$  thì khi ấy ta có:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

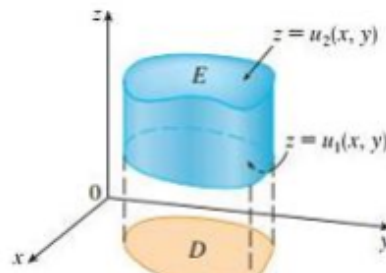
Ví dụ 1: Tính tích phân  $\iiint_B xyz^2 dV$  với  $B$  là hình hộp chữ nhật xác định bởi:

$$B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

\* Một hình khối  $E$  được gọi là khối Kiểu I nếu như nó được xác định bởi:

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Và gọi  $D$  là hình chiếu của  $E$  lên mặt phẳng  $xy$ .



Hình 2

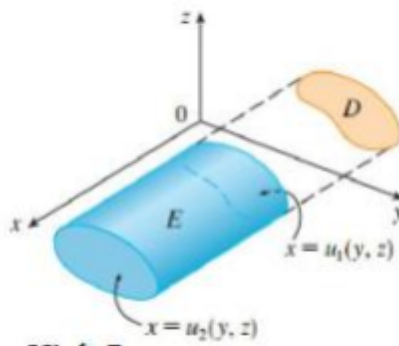
Khi ấy ta có:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

\* Một hình khối  $E$  được gọi là khối Kiểu II nếu như nó được xác định bởi:

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

Và gọi  $D$  là hình chiếu của  $E$  lên mặt phẳng  $yz$ .



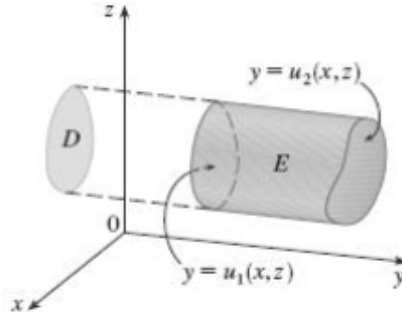
Khi ấy ta có:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

\* Một hình khối  $E$  được gọi là khối Kiểu III nếu như nó được xác định bởi:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

Và gọi  $D$  là hình chiếu của  $E$  lên mặt phẳng  $xz$ .



Khi ấy ta có:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Như vậy từ một tích phân 3 lớp, bằng cách lấy hình chiếu của hình khối được lấy tích phân lên trên mặt phẳng tương ứng của hệ trục tọa độ, chúng ta đã đưa các tích phân 3 lớp về các tích phân 2 lớp đã biết.

Với những dạng miền cụ thể của  $D$  (thuộc dạng hình chữ nhật, dạng I hay dạng II), chúng ta sẽ tính được các tích phân 3 lớp đã cho.

Ví dụ 2: Tính tích phân  $\iiint_E z dV$  trong đó  $E$  khối tứ diện bị chặn bởi 4 mặt phẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  và  $x + y + z = 1$ .