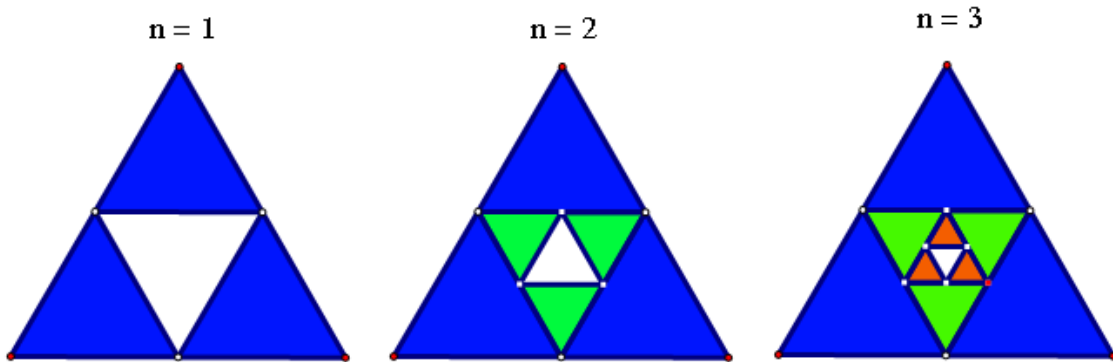


Bài toán: Đục lỗ tam giác đều

Cho một tam giác đều ABC cạnh 1. Tam giác $A_1B_1C_1$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có đỉnh là trung điểm của các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

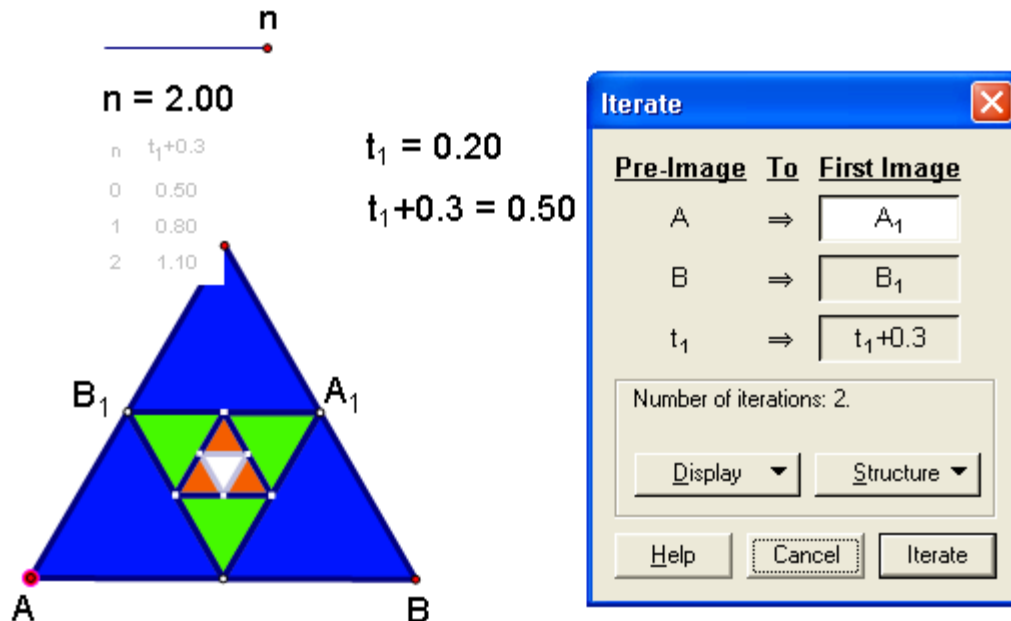
- Tìm giới hạn của các dãy số (P_n) và (S_n) .
- Tìm các tổng

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots \text{ và } S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$



Để thiết kế mô hình bằng cách đục lỗ các tam giác đều bên trong sao cho miền ngoài của tam giác được tô bởi những màu khác nhau, ta cần phải tô màu bằng tham số như sau.

- Dụng đoạn AB . Vẽ tam giác đều cạnh AB . Dụng 3 trung điểm của 3 cạnh. Dụng tam giác trong.
- Dụng miền trong của 3 giác phía ngoài.
- Dùng **Measure | Calculate**, nhập số 0.2 vào và **OK**. Ta có tham số $t_1 = 0.2$. Dùng **Measure | Calculate**, tính $t_1 + 0.3$.
- Chọn miền trong của ba tam giác, nhấp chuột vào t_1 , dùng **Display | Color | Parametric** để tô màu.
- Chọn A, B, t_1 và n , áp dụng **Transform | Shift | Iterate To Depth**, xuất hiện hộp thoại, cho A, B ứng lần lượt với A_1, B_1 còn t_1 ứng với $t_1 + 0.3$. Nhấn **Iterate** ta sẽ có quy luật được lặp lại.



Hình 5.2.3a

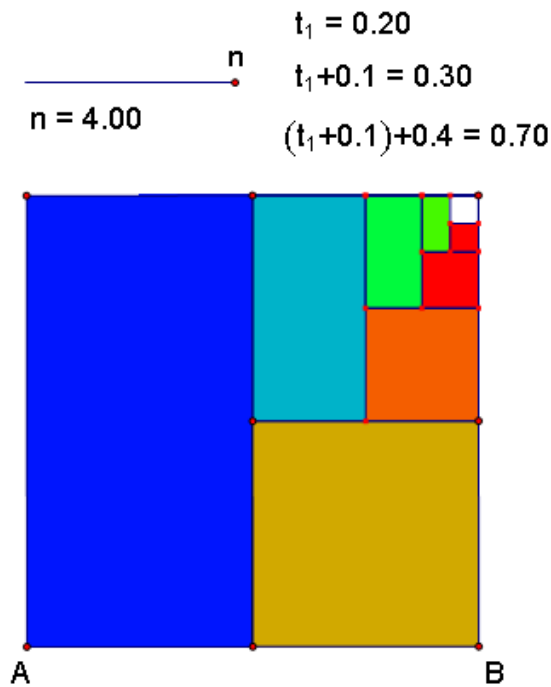
- Kéo rê n để thấy sự thay đổi màu của các phần ngoài tam giác.
- Kiểm chứng rằng

$$P_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n; S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Để minh họa cho tổng $P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots = \frac{1}{3}$. Ta xây dựng mô hình như sau:

- Dựng hình vuông cạnh AB (1 đơn vị).
- Nối trung điểm hai cạnh trên và dưới để có hình chữ nhật có diện tích $1/2$.
- Dựng tiếp hình vuông cạnh $1/2$ ở đáy.
- Dựng miền trong của hình chữ nhật và hình vuông. Tô màu bằng tham số t_1 và $t_1 + 0.5$.
- Chọn A, B, t_1 và n , áp dụng **Transform | Shift | Iterate To Depth** để thực hiện phép lặp như ở trên.
- Kéo rê n tăng dần để thấy tổng:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$



Hình 5.2.4

Ta cũng có thể thiết kế mô hình sau để minh họa cho tổng $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$.

- Dựng đoạn AB .
- Lấy trung điểm I của AB .
- Dựng hình chữ nhật cạnh đáy AI và chiều cao $0,5\text{cm}$.
- Chọn A, B, t_1 và n , áp dụng **Transform | Shift | Iterate To Depth** để thực hiện phép lặp như ở trên.

