BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI DUY TÂN

Khoa:	**Khoa học tự nhiên.**
Bộ môn:	**Toán**
Giảng viên:	**TS. Đặng Văn Cường**

TOÁN CAO CẤP A1

(Ví dụ và Bài tập)

Đà Nẵng - 2013

Chương 3

Tích phân và ứng dụng

3.1 Định nghĩa và tính chất của tích phân xác định

Ví dụ 3.1.1. Tính tích phân: $I = \int\limits_0^1 x^2$.

Vì $f(x) = x^2$ liên tục trên $[0, 1]$ nên nó khả tích trên $[0, 1]$, do đó

$$I = \int_0^1 x^2 = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i.$$

Ta phân hoạch $[0, 1]$ thành n đoạn bằng nhau, nghĩa là $x_i = \frac{i}{n}$, ta có $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}\ \forall i$. Chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý, và ở đây ta chọn $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$. Khi đó $\max \Delta x_i \to 0$ tương ứng với $n \to \infty$, do đó

$$\int_0^1 x^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 . \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vậy $I = \int\limits_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.1.2. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Vì hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên $[1, 2]$ nên nó khả tích trên đoạn đó. Phân hoạch đoạn $[1, 2]$ thành n phần theo các điểm chia sau: $x_i = 2^{i/n}$; $(i = 0, 1, 2, ...n)$, cụ thể $x_0 = 2^{0/n} = 2^0 = 1; x_1 = 2^{1/n}; ...; x_n = 2^{n/n} = 2^1 = 2$. Ta có $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 2^{i/n} - 2^{(i-1)/n} = 2^{(i-1)/n}(2^{1/n} - 1)$, vậy $\max \Delta x_i = 2^{(n-1)/n}(2^{1/n} - 1)$ và $\max \Delta x_i \to 0$ khi $n \to \infty$. Chọn $\xi_i = x_i = 2^{1/n}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . \frac{1}{\xi_i} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{i/n}} \right) . 2^{(i-1)/n} . \left(2^{1/n} - 1\right) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2^{1/n} - \frac{1}{2^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2^{1/n} - 1)}{2^{1/n}} = ln2. \end{aligned}$$

Trong kết quả trên ta đã sử dụng công thức $2^{1/n} - 1 \sim (\frac{1}{n}).ln2$ khi $n \to \infty$.

BÀI TẬP

1. Tìm tổng Riemann của các hàm với số các phép chia được chỉ ra.

(a) $f(x) = 2 - x^2,\ 0 \le x \le 2; n = 4$ với quy tắc điểm giữa.

(b) $f(x) = \ln x - 1,\ 1 \le x \le 4,\ n = 6$ với quy tắc chọn điểm đầu mút bên trái, chính xác đến 6 chữ số thập phân.

(c) $f(x) = \sqrt{x} - 2,\ 1 \le x \le 6,\ n = 5$ với quy tắc điểm giữa chính xác điến 6 chữ số thập phân.

2. Sử dụng quy tắc điểm giữa với giá trị n đã cho để xấp xỉ tích phân lấy chính xác đến 6 chữ số thập phân.

$(a)\ \int_2^{10} \sqrt{x^3+1}dx;\ n = 4$ $\qquad (b)\ \int_0^{\pi} \sec(x/3)dx;\ n = 6$

$(c)\ \int_1^2 \sqrt{1+x^2}dx;\ n = 10$ $\qquad (d)\ \int_2^4 x\ln x dx;\ n = 4$

3. Biểu diễn các giới hạn sau như một tích phân xác định trên khoảng đã cho.

$(a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sin x_i \Delta x_i;\ [0;\pi]$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1+x_i}\Delta x_i;\ [1;5]$

$(c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\Delta x_i;\ [1;8]$ $\qquad (d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\Delta x_i;\ [0;2]$

4. Tính các tích phân sau bằng Định nghĩa.

$(a)\ \int_{-1}^{5} (1+3x)dx$ $\qquad (b)\ \int_1^5 (2+3x-x^2)dx$ $\qquad (c)\ \int_0^2 (2-x^2)dx$

$(d)\ \int_0^5 (1+2x^3)dx$ $\qquad (e)\ \int_1^2 x^3 dx$

5. Biểu diễn các tích phân sau bằng giới hạn của một tổng Riemann, không cần tìm giá trị của giới hạn.

$(a)\ \int_2^6 \frac{x}{1+x^5}dx$ $\qquad (b)\ \int_1^{10} (x - 4\ln x)dx$

6. Tính các tích phân sau bằng cách biểu diễn nó theo diện tích.

$(a)\ \int_0^3 (\frac{1}{2}x - 1)dx$ $\qquad (b)\ \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$ $\qquad (c)\ \int_{-3}^{0} (1+\sqrt{9-x^2})dx$

$(d)\ \int_{-1}^{3} (3-2x)dx$ $\qquad (e)\ \int_{-1}^{2} |x|dx$ $\qquad (f)\ \int_0^{10} |x-5|dx$

7. Sử dụng (a) Quy tắc điểm giữa; (b) Quy tắc Simpson để xấp xỉ các tích phân sau với giá trị n được chỉ ra.

9.1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx,\ n = 8;$ 9.2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx,\ n = 6$

8. Sử dụng (a) Quy tắc Trapezoidal; (b) Quy tắc điểm giữa; (c) Quy tắc Simpson để xấp xỉ tích phân với giá trị n được chỉ ra. (Làm tròn kết quả đến sáu chữ số thập phân.)

$(a)\ \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx,\ n = 10;$ $(b)\ \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx,\ n = 10$ $(c)\ \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x} dx,\ n = 10$

$(d)\ \displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{1+t^2+t^4},\ n = 6;$ $(e)\ \displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{t}} dt,\ n = 8;$ $(f)\ \displaystyle\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx,\ n = 8$

$(g)\ \displaystyle\int_1^5 \frac{\cos x}{x} dx,\ n = 8;$ $(h)\ \displaystyle\int_4^6 \ln(x+3) dx,\ n = 10;$ $(i)\ \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{1+y^5} dy,\ n = 6.$

9.

(a) Tìm xấp xỉ T_{10} và M_{10} đối với tích phân $\int_0^2 e^{-x^2} dx$.

(b) Ước lượng sai số của các xấp xỉ trong phần (a).

(c) Cần chọn n bé nhất là bằng bao nhiêu sao cho các xấp xỉ T_n và M_n trong (a) có sai số nhỏ hơn $0,00001$?

10.

(a) Tìm xấp xỉ T_8 và M_8 đối với tích phân $\int_0^1 \cos(x^2) dx$.

(b) Ước lượng sai số của các xấp xỉ trong phần (a).

(c) Cần chọn n bé nhất là bằng bao nhiêu sao cho các xấp xỉ T_n và M_n trong (a) có sai số nhỏ hơn $0,00001$?

3.2 Nguyên hàm và tích phân bất định

Từ bảng các đạo hàm cơ bản, bằng phương pháp suy ngược ta dễ dàng suy ra được bảng các nguyên hàm cơ bản sau đây.

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq, x > 0);;$ 2) $\int adx = ax + C$ 3) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C,\ (x > 0, a \neq 1);$ 5) $\int \cos x dx = \sin x + C;$ 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$ 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotgx + C;$ 9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arxsinx + C.$

3.3 Định lí cơ bản của phép tính vi tích phân

Ví dụ 3.3.1. Tính $\int\limits_{-1}^{2} (x^3 + 1)dx$.

Ta có

$$I = \int_{-1}^{2} (x^6 + 2x^3 + 1)dx = \left(\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4}{4} + x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{405}{14}.$$

Ví dụ 3.3.2. Tính giá trị trung bình của $f(x) = \sin^2 x$ trên $[0, 2\pi]$.

Ta có:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{4\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3.3.3. Tính đạo hàm của $F(x) = \cos x. \int\limits_{x}^{x^2} e^{-t^2} dt$.

$$F'(x) = -\sin \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt + \cos\left(\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt\right)' = -\sin x \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt + \cos x(2x.e^{-x^4} - e^{-x^2}).$$

3.4 Các phương pháp tính tích phân

3.4.1 Phương pháp đổi biến

Ví dụ 3.4.1. Tính $\int (2x^3 + 1)^7 x^2 dx$.

Đặt $u = 2x^3 + 1$, ta có $du = 6x^2dx$. Do đó

$$\int (2x^3)^7 x^2 dx = \int u^7 \frac{du}{6} = \frac{1}{48}u^8 + C = \frac{1}{48}(2x^3+1)^8 + C.$$

Ví dụ 3.4.2. Tính $\int \frac{\sin(3lnx)}{x}dx$.

Đặt $u = 3lnx$ thì $du = 3dx/x$ rồi thay vào tương tự như trên. Tuy vậy ta có thể viết tắt sự đổi biến này như sau:

$$\int \sin(3lnx)\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\int \sin(3lnx)d(3lnx) = -\frac{1}{3}\cos(3lnx) + C.$$

Ví dụ 3.4.3. Tính $\int\limits_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx$.

Sử dụng phép đổi biến trực tiếp trong quá trình tính ta có:

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx = \int_2^{10} 3(5x-1)^{-1/2}dx = \frac{3}{5}\int_2^{10}(5x-1)^{-1/2}d(5x-1) = \frac{3}{5}\int_{u(2)}^{u(10)} u^{-1/2}du$$
$$= \frac{3}{5}u^{1/2}\Big|_{u(2)}^{u(10)} = \frac{6}{5}(5x-1)^{1/2}\Big|_2^{10} = \frac{24}{5}.$$

Ví dụ 3.4.4. Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Đặt $u = \pi/2 - x$ thì $du = -dx$. Ta có

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin(\pi/2 - x)dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x(\pi/2-x)d(\pi/2-x)$$
$$= -\int\limits_{u(0)}^{u(\pi/2)} \sin^n udu = -\int\limits_{\pi/2}^{0} \sin^n udu = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n udu = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx.$$

Ví dụ 3.4.5. Phép đổi biến $x = a\sin t$ thường có thể áp dụng cho hàm dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt{a^2-x^2},\ a \neq 0$. Chẳng hạn tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, đổi biến $x = a\sin t, dx = a\cos t$, thì

$$I = \int \frac{a\cos tdt}{a\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int dt = t + C = arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Chú ý rằng để $\sqrt{a^2-x^2}$ có nghĩa thì $-a \le x \le a$, nên $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. Do đó $\cos t \ge 0$ và $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Ví dụ 3.4.6. Phép đổi biến $x = atgt$ thường có thể dùng khi hàm dưới dấu tích phân có chứa $\frac{1}{a^2+x^2}$ hoặc $\sqrt{a^2+x^2},\ a > 0$. Tất nhiên ta chỉ cần lấy $-\pi/2 < t < \pi/2$ thì x lấy với mọi giá trị.

Do đó $\cos t > 0$ và $\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+tg^2 t} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}$.

Chẳng hạn, tính $I = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$. Đặt $x = atgt,\ dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$. Ta có

$$I = \int \frac{adt}{a^2(tg^2t+1)\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C.$$

Ví dụ 3.4.7. Phép đổi biến $x = \frac{a}{\cos t}$ có thể dùng khi hàm dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt{x^2-a^2},\ a > 0$. Khi đó $\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = a\sqrt{tg^2 t} = a|tgt|$. Việc bỏ dấu trị tuyệt đối là tuỳ trường hợp.

Nếu $x > a$ thì $0 \le t = arccos\frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}$, nên $tgt \ge 0$.

Nếu $x < -a$ thì $\frac{\pi}{2} < t = arccos\frac{a}{x} < \pi$, nên $tgt \le 0$.

Chẳng hạn, tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\ a > 0$. Trước hết giả sử $x > a$. Đổi biến $x = \frac{a}{\cos t},\ dx = \frac{a}{\cos t}tgtdt$ và $\sqrt{x^2-a^2} = atgt$. Do đó

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{d(t+\frac{\pi}{2})}{\sin(t+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d(t+\frac{\pi}{2})}{2\sin(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2})\cos(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})}{tg(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})\cos^2(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})} \\
&= \int \frac{d\left(tg(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})\right)}{tg(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})} = ln\left|tg(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2})\right| + C = ln\left|\frac{1+tg\frac{t}{2}}{1-tg\frac{t}{2}}\right| + C = ln\left|\frac{(1+tg\frac{t}{2})^2}{1-tg^2(\frac{t}{2})}\right| + C \\
&= ln\left|\frac{1+tg^2\frac{t}{2}}{1-tg^2\frac{t}{2}} + \frac{2tg\frac{t}{2}}{1-tg^2\frac{t}{2}}\right| + C = ln\left|\frac{1}{\cos t} + tgt\right| + C \\
&= ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C_1,
\end{aligned}$$

với $C_1 = C - lna$.

Trường hợp $x < -a$, ta đặt $u = -x$ thì $u > a$. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = -ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C = ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}.\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right| + C \\
&= ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{-a^2}\right| + C = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C_2'
\end{aligned}$$

với $C_2 = C - 2lna$.

Vậy trong cả hai trường hợp ta có $I = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$.

3.4.2 Phương pháp tích phân từng phần

Ví dụ 3.4.8. Tính $I = \int xe^{2x}dx$.

Đặt $u = x,\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = 1/2.e^{2x}$. Ta có

$$I = \int x.e^{2x}dx = x.\frac{1}{2}.e^{2x} - \int \frac{1}{2}.e^{2x}dx = \frac{x}{2}.e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Ví dụ 3.4.9. Tinh $I = \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Đặt $u(x) = x,\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = tgx$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int xd(tgx) = xtgx - \int tgxdx = xtgx - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \\ &= xtgx + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = xtgx + ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.4.10. $I = \int_1^e x^3(lnx)^2$.

Đặt $u = (lnx)^2 \Rightarrow du = \frac{2lnxdx}{x},\ dv = x^3dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e x^3(lnx)^2 = \frac{x^4}{4}(lnx)\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3lnx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\int_1^e x^3lnx \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^4}{4}lnx\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3dx\right) = \frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Qua các ví dụ trên đây và bằng cách tính trực tiếp ta có bảng bổ sung các nguyên hàm cơ bản.

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, a > 0,$ 12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0,$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = ln|x + \sqrt{x^2 + b}| + C,$ 14) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + C,$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = ln|tg\frac{x}{2}| + C,$ 16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = ln|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C,$

17) $\displaystyle\int tgxdx = -ln|\cos x| + C,$ 18) $\displaystyle\int cotgxdx = ln|\sin x| + C.$

3.4.3 Tích phân các phân thức hữu tỉ

Ví dụ 3.4.11. Phân tích phân thức $\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Trước hết ta có

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{A_1}{(x - 1)^2} + \frac{A_2}{(x - 1)^3} + \frac{B}{x + 3}.$$

Quy đồng mẫu thức ta được:

$$x^2 + 1 = A(x - 1)^2(x + 3) + A_1(x - 1)(x + 3) + A_2(x + 3)B(x - 1)^3. \tag{3.1}$$

Cho x lần lượt các trị $1, -3$ ta nhận được $A_2 = 1/2,\ B = -5/32$. Đồng nhất hệ số của x^3 cả hai vế (3.1) ta được $0 = A + B$ nên $A = -B = 5/32$. Lại cho $x = 0$ ở (1.2) ta được $1 = 3A_2 - 3A_1 + 3A - B$. Suy ra $A_1 = 3/8$. Tóm lại ta được

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3(x + 3)} = \frac{5}{32(x - 1)} + \frac{3}{8(x - 1)^2} + \frac{1}{2(x - 1)^3} + \frac{5}{32(x + 3)}.$$

Ví dụ 3.4.12. Cho phân thức $\frac{1}{x^5-x^2}$.

a) Phân tích phân thức thành tổng các phân thức đơn giản.

b) Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{x^5-x^2}$.

Giải:

a) Trước hết ta phân tích mẫu thức thành tích các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai vô nghiệm. Ta có

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Do đó

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Quy đồng mẫu thức ta được

$$\begin{aligned} 1 =& Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + \\ &+ Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Thay $x = 0$, rồi $x = 1$ vào ta được $B = -1,\ C = 1/3$. Đồng nhất hệ số của x^4, x^3, x^2 ở hai vế (1.4) ta được

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ B + C + E - D = 0, \\ C - E = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 1/3 + D = 0, \\ -1 + 1/3 + E - D = 0, \\ 1/3 - E = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ D - 1/3, \\ E = 1/3. \end{cases}$$

Vậy

$$\frac{1}{x^5-x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

b) Từ câu a) ta có

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.4.13. Tính tích phân $I = \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$.

Sử dụng phương pháp bất định, sau khi tính toán cụ thể ta được kết quả

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Do đó

$$I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{(x+2)dx}{x^2+1} - \int \frac{(3x+4)dx}{(x^2+1)^2} = ln|x-2| -$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Từ công thức truy hồi (1.1) ta có

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctgx + C_1.$$

Do đó

$$I = \frac{1}{2}ln\frac{(x-2)^2}{x^+1} - 2arctgx + \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{4x}{2(x^2+1)} - 2arctgx + C$$
$$= \frac{1}{2}ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4arctgx + \frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2} + C.$$

Ví dụ 3.4.14. Tính $I = \int \frac{x^2dx}{(x-1)^5}$.

Nếu ta cứ tuân theo quy tắc thì phải tính 5 tích phân loại I và II. Bằng cách đổi biến $t = x - 1$ ta có

$$I = \int \frac{(t+1)^2}{t^5}dt = \int \frac{t^2+2t+1}{t^5}dt = \int \frac{dt}{t^3} + 2\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} + C$$
$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C = -\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4} + C.$$

3.4.4 Tích phân các hàm lượng giác

Ví dụ 3.4.15. Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, ta có

$$I = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C.$$

b) **Một số trường hợp đặc biệt.** (1) Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = tgx$ hoặc $t = cotgx$.

(2) Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.

(3) Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.

(4) Tích phân dạng $\int \sin^m x \cos^n x dx$. Nếu ít nhất một trong hai số m và n là số lẻ thì rơi vào một trong ba trường hợp trên. Nếu m và n là hai số chẵn và có ít nhất một số âm thì đặt $t = tgx$. Nếu m, n đều chẵn và dương thì dùng công thức góc nhân đôi để biến đổi tích phân.

Ví dụ 3.4.16. Tính $I = \int(\sin^2 x \cos^3 x + \cos x)dx$.

Hàm dưới dấu tích phân lẻ theo $\cos x$, nên ta đặt $t =\in x$. Khi đó $dt = \cos x$ và ta có

$$I = \int [t^2(1-t^2)+1]dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t + C = \frac{\sin^3}{3} - \frac{\sin^4}{4} + \sin x + C.$$

Ví dụ 3.4.17. Tính $I = \int \frac{dx}{\sin^2 + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Xét thấy hàm dưới dấu tích phân thoả mãn trường hợp (1) nên ta đặt $t = tgx$. Khi đó

$$x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Thay vào tích phân ta được

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.4.18. Tính $I = \int \sin^4 x dx$.

Đây là trường hợp m, n chẵn, dương. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \end{aligned}$$

3.4.5 Tích phân một số hàm vô tỉ

a) **Dạng** $\int R(x, x^{m/n}, ..., x^{r/s})dx$ **với** R **hàm hữu tỉ,** $m, n, r, s \in \mathbb{N}$.

Giả sử k là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $n, ..., s$ thì $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{k}, ..., \frac{s}{r} = \frac{r_1}{k}$. Đặt $x = t^k$, ta được

$$\int R\left(x, x^{m/n}, ..., x^{r/s}\right) dx = k \int R\left(t^k, t^{m_1}, ..., t^{r_1}\right) t^{k-1} dt,$$

là tích phân của một hàm hữu tỉ.

Ví dụ 3.4.19. Tính $I = \int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x}+1)} dx$.

Đặt $x = t^8$ ta được

$$\begin{aligned} I &= 8\int \frac{t^2 - t}{t^8(t^2+1)} t^7 dt = 8\int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{8dt}{t^2+1} = 4\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 8arctgt + C_1 \\ &= 4ln(t^2+1) - 8arctgt + C = 4ln(\sqrt[4]{x}+1) - 8arctg\sqrt[8]{x} + C. \end{aligned}$$

b) **Dạng** $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$**, với** R **là hàm hữu tỉ.**

Gọi k là bội chung nhỏ nhất của các mẫu $n, ..., s$. Đặt $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, ta cũng hữu tỉ hoá được tích phân trên.

Ví dụ 3.4.20. Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.\frac{dx}{x+1}$.

Đặt $\frac{x+1}{x-1} = t^3$ ta được $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}dt$, $x + 1 = \frac{2t^3}{t^3-1}$. Do đó

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{3dt}{t^3-1} = -\int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt \\ &= \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} + \frac{3}{2}\int \frac{d(t+1/2)}{(t+1/2)^2+3/4} \\ &= -ln|t-1| + \frac{1}{2}ln|t^2+t+1| + \sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

với $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

c) **Dạng** $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,\ a \neq 0$**.**

Ta có

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Đặt $u = x + \frac{b}{2a}$ thì $du = dx$ và ta được các dạng sau:

(1) Nếu $b^2 - 4ac \geq 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{u^2-\alpha^2}$ khi $a > 0$ và $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{\alpha^2-u^2}$ khi $a < 0$, trong đó $\alpha^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

(2) Nếu $b^2 - 4ac < 0$ khi đó hiển nhiên $a > 0$ và ta có $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{u^2+\alpha^2}$, trong đó $\alpha = -\frac{b^-4ac}{4a^2}$.

3.5 Tích phân suy rộng

3.5.1 Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ 3.5.1. Xét sự hội tụ, phân kỳ và tính $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Ta có

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^b = arctgb.$$

Từ đó suy ra $I = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.5.2. Xét tính hội tụ của $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $\alpha = 1: \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = lnx\Big|_a^b = lnb - lna \to +\infty$ khi $b \to \infty$, vậy tích phân $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ.

Nếu $\alpha \neq 1: \int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$.

Khi $\alpha > 1$, thì $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = 0$ nên $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ và $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Khi $\alpha < 1$, thì $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$ nên $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ phân kỳ.

3.5.2 Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ 3.5.3. Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Xét thấy $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, nên theo định nghĩa ta có

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ta có

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to-1^+} \int_c^0 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{c\to-1^+} (-arcsinc) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to1^-} \int_0^c \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{c\to1^-} (arcsinc) = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy nên $I = \pi$.

Ví dụ 3.5.4. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha},\ b > a,\ \alpha > 0$.

Xét thấy $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha} = +\infty$ nên I là tích phân suy rộng loại 2.

Với $\alpha = 1: \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = ln(b-a) - ln\varepsilon \to \infty$ khi $\varepsilon \to 0^+$.

Với $\alpha \neq 0$: $\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \frac{1}{1-\alpha}[\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}]$.

Nếu $\alpha < 1$, thì $\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$ khi $\varepsilon \to)^+$ nên $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Nếu $\alpha > 1$, thì $\varepsilon^{1-\alpha} \to +\infty$ khi $\varepsilon \to 0^+$ nên tích phân I phân kỳ.

Tóm lại $\int_a^b \frac{dx}{b-x)^\alpha}$ hội tụ với $\alpha < 1$ và phân kì với $\alpha \geq 1$.

3.5.3 Một số tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng

Ví dụ 3.5.5. Xét tính hội tụ, phân kì của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$. Với $x > 1$ ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{x}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Do $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ phân kì ($\alpha = 1/2 < 1$) nên $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ phân kì.

Ví dụ 3.5.6. Nghiên cứu sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$.

Ta có $0 < f(x) = \frac{1}{1+x^{10}} \leq \frac{1}{x^10}$. Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$ hội tụ.

Ví dụ 3.5.7. Xét sự hội tụ của tích phân $\int_2^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$.

Ta có $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ khi $x \to +\infty$, tức là $k = 1$. Mà $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ phân kì nên $\int_2^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$ phân kì.

Ví dụ 3.5.8. Nghiên cứu sự hội tụ của tích phân $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$.

Xét thấy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{x^{3/2}}.\frac{1}{\sqrt{(1-1/x)(1-2/x)}}.$$

Khi $x \to +\infty$ $f(x)$ là vô cùng bé bậc $3/2$ so với $1/x$. Vậy theo tiêu chuẩn 2 thì tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 3.5.9. Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}dx$.

Xét thấy khi $0 < x \leq 1$ thì

$$0 \leq \left|\frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên tích phân $\int_0^1 \left|\frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}\right| dx$ hội tụ. Vậy tích phân $\int_0^1 \frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ tuyệt đối nên nó hội tụ.

Ví dụ 3.5.10. Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{ln(1+\sqrt[3]{x})dx}{e^{\sin x}-1}.$$

Xét thấy hàm dưới dấu tích phân dương trong $(0, 1]$ nên có thể áp dụng Định lí so sánh 3.6. Khi $x \to 0^+$ ta có

$$ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{1/3}, e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \Rightarrow \frac{ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{x^{1/3}}{x} \sim \frac{1}{x^{2/3}}.$$

Mặt khác ta có $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ hội tụ (do $\alpha = 1/3 < 1$) nên tích phân cần xét cũng hội tụ.

Ví dụ 3.5.11. Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx.$$

Xét thấy $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} = +\infty$ và khi $x \to 0^+$ thì

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}x, e^x \to 1 \Rightarrow \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{x}.$$

Suy ra

$$\lim_{x\to o^+} \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} : \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ phân kì nên I phân kì.

3.6 Một số ứng dụng của tích phân

3.6.1 Diện tích hình phẳng.

Ví dụ 3.6.1. Tính diện tích của Cycloid

$$\begin{cases} x = at + asint \\ y = a - acost \end{cases},$$

với $0 \leq t \leq 2\pi$. Theo (**??**) ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2})dt \\ &= a^2(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{đơn vị diện tích.} \end{aligned}$$

3.6.2 Một số ứng dụng Vật lý - Kỹ thuật

Ví dụ 3.6.2. Một hành tinh hình cầu, band kính Rkm có mật độ thay đổi theo khoảng các r từ tâm theo công thức

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+r^2} kg/km^3.$$

Hãy tìm khối lượng của hành tinh.

Ta thấy một lớp cầu mỏng, bán kính r, đọ dài dr có thể tích là $dV = 4\pi r^2 dr$. Yếu tố thể tích này có khối lượng là yếu tố khối lượng

$$dm = \rho dV = \frac{4\pi\rho_0 r^2}{1+r^2} dr.$$

Do đó khối lượng của hành tinh là

$$m = 4\pi\rho_0 \int_0^R \frac{r^2 dr}{1+r^2} = 4\pi\rho_0(R - arctgR)kg.$$

Ví dụ 3.6.3. Tìm khối lượng một đĩa kim loại bán kinh acm và tâm ở gốc toạ độ trên mặt phẳng xOy, với mật độ $\rho(x,y) = k(2a+x)g/cm^3$, k=const.

Ta lấy yếu tố diện tích là giải thẳng đứng tại x với độ rộng dx thì $dS = 2\sqrt{a^2 - x^2}dx$, $dm = \rho dS = 2k(2a + x)\sqrt{a^2 - x^2}dx$. Dó đó khối lượng của cả đĩa là

$$m = 2k\int_{-a}^{a}(2a + x)\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\pi ka^2g.$$

b) Mômen và tâm khối lượng.

Trong cơ học người ta gọi *mômen* của khối lượng m đặt ở vị trí x trên trục Ox đối với điểm $x = 0$ là lượng $x.m$, hay tổng quát hơn mômen đối với điểm $x = x_0$ là $(x - x_0).m$. Nếu có nhiều khối lượng $m_1, m_2, ..., m_n$ đặt các vị trí $x_1, x_2, ..., x_n$ tương ứngthì mômen của hệ đối với điểm $x = x_0$ là

$$M_{x=x_0} = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0)m_j.$$

Tâm khối lượng của hệ các khối lượng nói trên là điểm $\overline{x}$ mà mômen của hệ đối với nó bằng 0. Do đó

$$0 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})m_j = \sum_{j=1}^{n}x_jm_j - \overline{x}\sum_{j=1}^{n}m_j.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n}x_jm_j}{\sum_{j=1}^{n}m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}. \tag{3.3}$$

Ý nghĩa của tâm khối lượng: Nếu coi trục Ox là sợi dây thép không trọng lượng, trên đó có đặt các khối lượng m_j tại x_j, $j = 1, 2, ..., n$, thì có thể treo sợi dây thép đó tại $\overline{x}$ mà dây vẫn nằm ngang cân bằng.

Bây giờ, giả sử có một phân phối khối lượng một chiều trên trục Ox với mật độ là hàm $\rho(x)$, phụ thuộc x trên đoạn $[0, a]$. Hãy tính mômen của hệ và tìm tâm khối lượng. Ta thấy yếu tố độ dài dx ở tại x sẽ chứa khối lượng $dm = \rho(x)dx$ và dó đó có mômen

$$dM_{x=0} = xdm = x\rho(x)dx$$

đối với điểm $x = 0$. Do đó mômen của hệ là

$$M_{x=0} = \int_{0}^{a}x\rho(x)dx.$$

Theo (3.3), ta có tâm khối lượng là

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_0^a x\rho(x)dx}{\int_0^a \rho(x)dx}.$$

Ví dụ 3.6.4. Xác định tâm khối lượng của một dây kim loại chiếm đoạn $[0, L]$ trên trục Ox, nếu mật độ là $\rho(x) = x$.

Khối lượng của dây là

$$m = \int_0^L x dx = \frac{L^2}{2}.$$

Mômen với $x = 0$ là

$$M_{x=0} = \int_0^L x^2 dx = \frac{L^3}{3}.$$

Do đó tâm khối lượng ở vị trí $\overline{x} = \frac{2L}{3}$.

Trường hợp hai hoặc ba chiều: Ta cũng có định nghĩa và công thức tương tự như trường hợp một chiều trên dây. Ta xét chẳng hạn trường hợp hai chiều. Giả sử có các khối lượng m_j đặt tại (x_j, y_j), $j = 1, 2, ..., n$. Ta gọi mômen của hệ đối với $x = 0$, tức đối với trục Oy là $M_{x=0} = \sum_{j=1}^n x_j m_j$; mômen của hệ đối với $y = 0$, tức là đối với trục Ox là $M_{y=0} = \sum_{j=0}^n y_j m_j$. Tâm khối lượng của hệ là điểm $(\overline{x}, \overline{y})$ với

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j m_i}{\sum_{j=1}^n m_j}; \qquad \overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j m_i}{\sum_{j=1}^n m_j}.$$

Đối với trường hợp khối lượng phân phối liên tục ta xét một ví dụ làm điển hình.

Ví dụ 3.6.5. Tìm tâm khối lượng của một đĩa nhôm phẳng có hình là miền là hình thang cong giới hạn bởi $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$, nếu mật độ tại điểm (x, y) là $\rho(x)$ (chỉ phụ thuộc vào x).

Ta có yếu tố khối lượng tại (x, y) là $dm = \rho(x)f(x)dx$, cho nên mômen của nó đối với trục Oy là

$$dM_{x=0} = x\rho(x)f(x)dx.$$

Vì mật độ $\rho(x)$ trên yếu tố khối lượng này là cố định (x cố định), nên $\overline{y}_{dm} = 1/2f(x)$ (điểm giữa). Do đó mômen của yếu tố khối lượng lượng này đối với $y = 0$ là

$$dM_{y=0} = \overline{y}_{dm} = \frac{1}{2}\rho(x)(f(x))^2 dx.$$

Vì vậy ta có

$$m = \int_a^b \rho(x)f(x)dx; \quad \overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m}; \quad \overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m}. \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.6.6. Tìm trọng tâm hình học của hình thang với các đỉnh

$$(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 1).$$

Ta thấy hình thang là hợp của hai hình rời nhau, một hình vuông và một tam giác.

Ta có trọng tâm hình vuông là $(x_v, y_v) = (1/2, 1/2)$ và diện tích là $S_1 = 1$. Tam giác có trọng tâm hinh học là giao điểm của ba trung tuyến, $(x_t, y_t) = (2/3, 4/3)$ và diện tích là $S_2 = 1/2$. Ta có

$$M_{x=0} = M_{v,x=0} + M_{t,x=0} = S_1\overline{x}_v + S_2\overline{x}_t = \frac{5}{6}$$
$$M_{y=0} = M_{v,y=0} + M_{t,y=0} = S_1\overline{y}_v + S_2\overline{y}_t = \frac{7}{6}.$$

Diện tích của cả hình thang là $S_1 + S_2 = \frac{3}{2}$, nên trọng tâm hình học là

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{5}{6} : \frac{3}{2}, \frac{7}{6} : \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

Ví dụ 3.6.7. Một bình chứa đầy nước có dạng hình nón tròn xoay thẳng đứng với bán kính đáy trên là $3m$ và độ sâu $4m$. Cần một công bao nhiêu để bơm toàn bộ nước ra khỏi bình qua mép trên?

Ta coi yếu tố thể tích là thể tích của đĩa tròn ở độ cao hm từ đỉnh và chiều dày dh. Khi đó $r = 3/4h$, nên

$$dV = \pi r^2 dh = \frac{9}{16}\pi h^2 dh.$$

Lực để thắng được lực của phần nước dày là

$$dF = \rho g dV = \frac{9}{16}\rho g \pi h^2 dh.$$

Lượng nước này cần phải chuyển lên một đoạn là $(4-h)m$ bằng bơm, nên công sẽ là

$$dW = \frac{9}{16}\rho g\pi(4-h)h^2 dh.$$

Đây chính là yếu tố công, do đó công sẽ là

$$W = \int_0^4 \frac{9}{16}\rho g\pi(4h^2 - h^3)dh = \frac{9}{16}\rho g\pi(\frac{3}{4}h^3 - \frac{h^4}{4})\Big|_0^4 \approx 3,69.10^5 N.m.$$

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa tích phân xác định, tính diện tích giới hạn bởi các đường:

a) $y = x^m,\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ với $m \neq -1, 0 < a < b$.

b) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 0$.

c) $y = 2^x,\ x = -1,\ x = 1$.

2. Dùng các tính chất của tích phân và diện tích hình phẳng, tính:

$$a)\ \int_{-3\pi}^{3\pi} \sin(x^3 + x)dx; \qquad b)\ \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}dx; \qquad c)\ \int_{1}^{-2} |x|dx.$$

3. Dùng công thức đạo hàm theo cận tích phân, tính:

$$a)\frac{d}{dt}\left(\int_1^t \frac{\cos x\sin x}{x^2}dx\right); b)\frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)} f(t)dt\right); c)\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} t\cos t^3 dt\right).$$

4. Sử dụng tính chất của tích phân và định lí giá trị trung bình, chứng minh rằng:

a) $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \frac{4}{3}$;

b) Nếu $f'(x)$ tồn tại và $|f'(x)| \le M, \forall x \in [a,b]$ thì

$$|f(x)| \le M(b-a) \text{ và } |\int_a^b f(x)dx| \le \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

5. Dùng phương pháp đổi biến tính các tích phân:

$$a)\int \sin(2-3x)dx;\quad b)\int \sqrt{3x+4}dx;\quad c)\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}};\quad d)\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx;\quad e)\int tg^3 xdx;$$

$$f)\int x^3\sqrt{a-x^2}dx;\quad g)\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}};\quad h)\int_e^{e^2} \frac{dt}{tlnt};\quad i)\int \frac{\sin 4xdx}{\cos^4 2x+4}$$

6. Dùng phép đổi biến ngược, tính các tích phân sau:

$$a)\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-4x^2}};\quad b)\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}};\quad c)\int \frac{dx}{(1+x^2)^3};$$

$$d)\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx;\quad e)\int_{-ln2}^0 e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx;\quad f)\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{t^2+2t+2}.$$

7. Dùng công thức tích phân từng phần, tính các tích phân:

$$a)\int x^3\cos\pi xdx;\quad b)\int x^3 lnxdx;\quad c)\int x^2 arctgxdx;\quad d)\int \sin(lnx)dx;$$

$$e)\int_{1/2}^1 \frac{arc\sin x}{x^2}dx;\quad f)\int e^{-2x}\cos 3xdx;\quad g)\int \frac{arctgxdx}{x^2(1+x^2)};\quad h)\int \frac{xe^{arctgx}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx;$$

$$i)\int (x^2+1)e^{-2x}dx.$$

8. Tính tích phân các hàm hữu tỉ:

$$a)\int \frac{dx}{x^3+1};\quad b)\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2};\quad c)\int \frac{2xdx}{(x+1)(1+x^2)^2};$$

$$d)\int \frac{dx}{x(x-1)^2};\quad e)\int \frac{2x^2+x+3}{x^3+3x^2+3x+2}dx;\quad f)\int \frac{x^3dx}{x^3-a^3};$$

$$g)\int \frac{x^3+2}{x^3-1}dx;\quad h)\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx;\quad i)\int \frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$$

9. Tính tích phân các hàm lượng giác:

$$a)\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x};\quad b)\int \sin^3 x\cos^5 xdx;\quad c)\int \sin^6 xdx;$$

$$d)\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x};\quad e)\int \frac{tgxdx}{\cos^5 x}dx;\quad f)\int \frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^4 x};$$

$$g)\int \cos x\sin^4(\sin x)dx;\quad h)\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}};\quad i)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$$

10. Tính tích phân các hàm vô tỉ:

$$a)\ \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx; \qquad b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}; \qquad c)\ \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x};$$
$$d)\ \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx; \quad e)\ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}; \quad f)\ \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}.$$

11. Bằng phương pháp tổng hợp, tính các tích phân:

$$a)\ \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx; \quad b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}; \quad c)\ \int \frac{tgxdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}};$$
$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}; \quad e)\ \int \frac{e^{2arctgx}}{1+x^2}dx; \quad f)\ \int \frac{arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx.$$

12. Tìm giá trị hoặc chứng tỏ tích phân sau phân kì:

$$a)\ \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx; \quad b)\ \int_{-\infty}^0 xe^x dx; \quad c)\ \int_0^{+\infty} \cos x dx; \quad d)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}};$$
$$e)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}; \quad f)\ \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad g)\ \int_0^2 \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad h)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$

13. Xét sự hội tụ của các tích phân:

$$a)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^3}dx; \quad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx; \quad c)\ \int_{-1}^1 \frac{e^x dx}{x+1}; \quad d)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x};$$
$$e)\ \int_1^{+\infty} (1-\cos\frac{2}{x})dx; \quad f)\ \int_0^1 \frac{dx}{tgx-1}; \quad g)\ \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}dx; \quad h)\ \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$$

14. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong:

(a) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$; $\qquad$ (b) $y = x^2-5, y = 3-x^2$;

(c) $y = e^{-x}\sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$; $\qquad$ (d) $y = \dfrac{1}{x}, 2x+2y = 5$;

(e) $2y = 4x-x^2, 2y+3x = 6$; $\qquad$ (f) $r^2 = a(1-\cos\varphi), r = a$.

15. Tìm thể tích các vật thể giới hạn bởi các đường:

a) Phần chung của hai trụ giới hạn bởi $x^2+y^2 = a^2$ và $y^2+z^2 = a^2$.

b) Giới hạn bởi Paraboloid $z = 4-y^2, x = a$ và các mặt toạ độ.

c) Tròn xoay, do $y^2+x-4 = 0$ quay quanh Oy.

d) Tròn xoay, do một nhịp Cycloit $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$ quay quanh Ox.

16. Tính thể tích theo hai cách, theo lát và theo lớp trụ các vật thể:

a) Vật tròn xoay do hình giới hạn bởi $y = x^2, y = 0, x = 1$ quay quanh Ox;

b) Vật tròn xoay giới hạn bởi $y = x^2, y = \sqrt{x}, x = 0, x = 1$, quay quanh Ox.

17. Tìm độ dài các đường cong:

a) $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ từ $x = 1$ tới $x = 4$.

b) $9y^2 = 4(3-x)^3$, phần giữa các giao điểm của đường cong với trục Oy.

c) Cardioid $r = a(1+\cos\varphi)$; d) $r = e^{a\varphi}, -\pi \le \varphi \le \pi$;

e) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$;

f) $x = t^2 \sin t,\ y = t^2\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

18. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Miền giữa gốc cực và đường xoắn ốc $r = \sqrt{\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$;

b) Miền giới hạn của vòng nhỏ hơn của $r = 1 + 2\cos\varphi$;

c) Miền giới hạn bởi $x = (2+\sin t)\cos t,\ y = (2+\sin t)\sin t$.

19. Tìm khối lượng và tâm khối lượng

a) Đĩa có hình $0 \le y \le 4 - x^2$ với mật độ $\rho(x,y) = ky$.

b) Một đĩa vuông, cạnh acm, nếu mật độ tại P là kxg/cm^2, với x là khoảng cách từ P đến một cạnh hình vuông.

20. Tìm trọng tâm hình học của các hình:

a) Một phần tư hình tròn $x^2 + y^2 \le r^2, x \ge 0, y \ge 0$.

b) $0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

21. Xác định công cần thiết để phóng một tên lửa nặng $1,5$ tấn từ mặt đất lên cao 2000km.

22. Tìm khối lượng của một hình cầu bán kính r, nếu khối lượng riêng (mật độ) tại mỗi điểm tỉ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến tâm.

Ví dụ 3.6.8. Chỉ ra rằng bất kỳ phần tử của họ hàm

$$y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$$

là một nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

Giải: Chúng ta sử dụng quy tắc thương đối với đạo hàm để biểu diễn y

$$y' = \frac{(1-ce^t)(ce^t) - (1+ce^t)(ce^t)}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}.$$

Thay y vào vế phải của phương trình vi phân trở thành

$$\frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}.$$

Ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.6.9. Tìm một nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Giải: Thế giá trị $t = 0$ và $y = 2$ vào công thức

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

từ Ví dụ 1, ta nhận được

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c} \ \Rightarrow c = \frac{1}{3}.$$

Như vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}.$$