BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI DUY TÂN

Khoa:	**Khoa học tự nhiên.**
Bộ môn:	**Toán**
Giảng viên:	**TS. Đặng Văn Cường**

TOÁN CAO CẤP A1

(Ví dụ và Bài tập)

Đà Nẵng - 2013

Chương 1

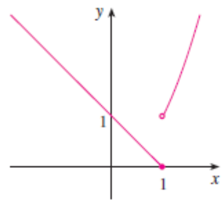
Hàm số - Giới hạn

1.1 Hàm và các mô hình hàm số

1.1.1 Bốn phương pháp xác định hàm số

Ví dụ 1.1.1. Hàm f được xác định bởi

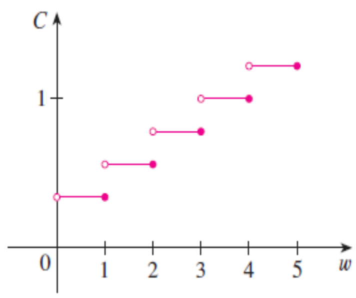
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ nếu } x \leq 1 \\ x^2 \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$$



Hình 7

Tính $f(0), f(1)$ và $f(2)$ và vẽ đồ thị.

Ví dụ 1.1.2. Trong ví dụ C bắt đầu của phần này ta đã xét chi phí $C(w)$ của lá thư theo trọng lượng w. Thực ra đây là một hàm định nghĩa bộ phận bởi vì, từ bảng các giá trị ta có

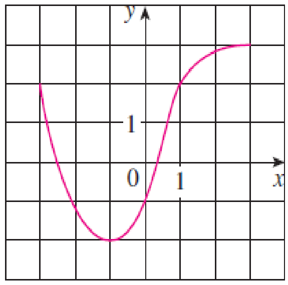


Hình 8

$$C(w) = \begin{cases} 0.28 \text{ nếu } 0 < w \leq 60 \\ 0.42 \text{ nếu } 60 < w \leq 100 \\ 0.60 \text{ nếu } 100 < w \leq 150 \\ 0.75 \text{ nếu } 150 < w \leq 200 \end{cases}$$

BÀI TẬP

1. Đồ thị của hàm được cho bởi hình



(a) Tính giá trị của $f(-1)$.

(b) Tính giá trị của $f(2)$.

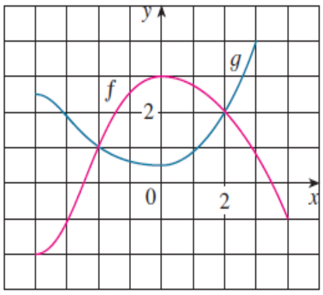
(c) Với giá trị nào của x thì $f(x) = 2$?

(d) Tìm giá trị của x sao cho $f(x) = 0$.

(e) Tìm miền xác định và miền giá trị của f.

(f) Trong khoảng nào thì f tăng, giảm?

2 Đồ thị của f và g cho bởi hình vẽ.



(a) Tính giá trị của $f(-4)$ và $g(3)$.

(b) Với các giá trị nào của x thì $f(x) = g(x)$?

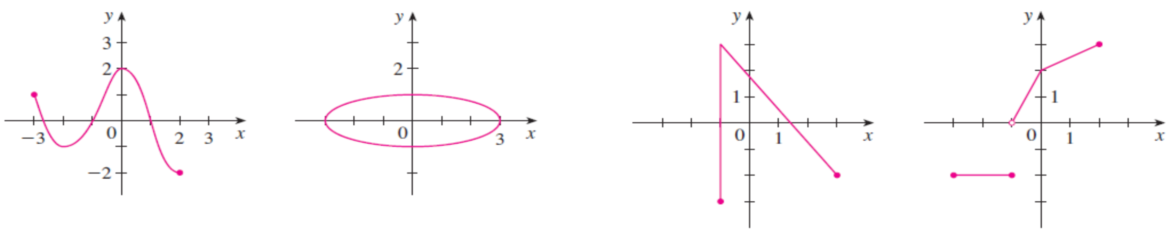
(c) Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = -1$.

(d) Trong khoảng nào thì hàm f tăng ?

(e) Tìm miền xác định và miền giá trị của f.

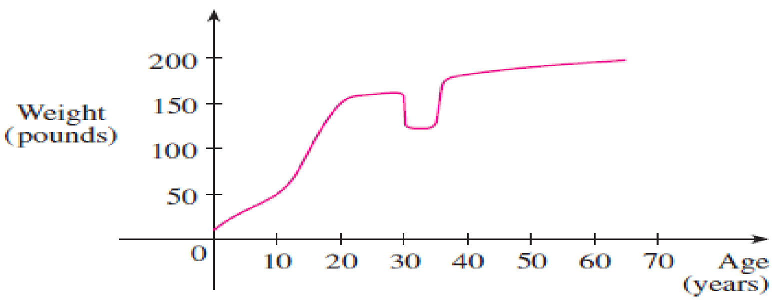
(f) Tìm miền xác định và miền giá trị của g.

3-6. Hãy xác định đường cong là đồ thị của hàm số theo x. Nếu đúng, thì hãy tính miền xác định và miền giá trị của hàm đó.



3 4 5 6

7 Đồ thị dưới đây mô tả trọng lượng của một người nào đó như là một hàm theo độ tuổi. Hãy diễn tả bằng ngôn ngữ trọng lượng của người này trong các khoảng thời gian khác nhau. Bạn nghĩ điều gì sẽ xảy ra nếu người này được 30 tuổi ?



8. Vẽ phác thảo đồ thị của hàm số về số giờ nắng ban ngày theo thời gian (năm).
9. Vẽ phác thảo đồ thị của nhiệt độ bên ngoài của một ngày điển hình trong mùa xuân như là một hàm theo thời gian.
10. Vẽ phác thảo đồ thị về giá trị trường của một chiếc xe ô tô mới trong khoảng thời gian 20 năm như là một hàm theo thời gian. Giả sử rằng ô tô được bảo quản tốt.
11. Vẽ đồ thị về số lượng bán ra của một loại cà phê đặc biệt tại một của hang như là một hàm theo giá của cà phê.
12. Bạn đặt một cái bánh pa-tê lạnh vào trong lò và nung nó trong một giờ. Sau đó bạn lấy nó ra và để nguội trước khi ăn nó. Mô tả sự thay đổi nhiệt độ của bánh pa-tê trong khoảng thời gian đó. Sau đó vẽ phác thảo đồ thị của hàm nhiệt độ của bánh pa-tê theo thời gian.
13. Người chủ nhà cắt cỏ vào mỗi chiều thứ tư. Hãy vẽ phác hoạ đồ thị của hàm theo thời gian chỉ chiều cao của cỏ trong khoảng thời gian bốn tuần.
14. Con số N (nghìn) chỉ số người đăng ký thuê bao điên thoại trên thế giới được cho trong bảng. (Ước lượng giữa năm cho bởi)

t	1900	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

(a) Dùng dữ liệu trên vẽ phác hoạ đồ thị của hàm N theo thời gian t.
(b) Dùng đồ thị đó hãy ước lượng số thuê bao điện thoại của giữa năm 1995 và 1999.
15-18. Hãy ước lượng tỷ số sai phân cho các hàm số sau. Và đơn giản nó.

15. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$. 16. $f(x) = x^3$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
17. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. 18. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

19 - 23. Tìm miền xác định của hàm số.

19.$f(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$. 20.$f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$. 21.$f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$.
22. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4 - u}$. 23.$h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$.

24 - 35. Tìm miền xác định và vẽ đồ thị của hàm số.

24. $f(x) = 5.$ 25. $F(x) = \frac{1}{2}(x+3).$ 26. $f(t) = t^2 - 6t.$

27. $H(t) = \frac{4-t^2}{2-t}.$ 28. $g(x) = \sqrt{x-5}.$ 29. $F(x) = |2x+1|\,.$

30. $G(x) = \frac{3x+|x|}{x}.$ 31. $g(x) = \frac{|x|}{x^2}.$

32. $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ nếu } x < 0 \\ 1-x \text{ nếu } x \geq 0 \end{cases}.$ 33. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x \text{ nếu } x \leq 2 \\ 2x-5 \text{ nếu } x > 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ nếu } x \leq -1 \\ x^2 \text{ nếu } x > -1 \end{cases}.$ 35. $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x \leq -1 \\ 3x+2 \text{ nếu } |x| < 1 \\ 7-2x \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}.$

36 - 39. Tìm hàm biểu diễn đồ thị được cho bởi đường cong .

36. Đoạn thẳng nối giữa hai điểm (-2, 1) và (4, -6).

37. Đoạn thẳng nối giữa hai điểm (-3, -2) và (6, 3).

38. Nửa dưới của parabol.

39. Nửa trên của đường tròn.

40 - 44. Tìm công thức mô tả hàm số và chỉ ra miền xác định của nó.

40. Một hình chủ nhật có chu vi $20m$. Biểu thức diện tích của hình chữ nhật là một hàm theo chiều dài và chiều rộng của nó.

41. Một hình chữ nhật có diện tích $16m^2$. Biểu thức của chu vi hình chữ nhật là một hàm theo chiều dài và chiều rộng của nó.

42. Biểu thức diện tích của tam giác đều là một hàm theo chiều dài của cạnh của tam giác đó.

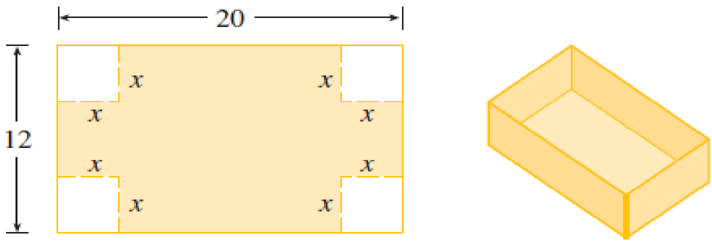
43. Biểu thức diện tích bề mặt của hình lập phương là một hàm theo thể tích của nó.

44. Một cái hộp có dạng hình chữ nhật với thể tích $2m^3$ có đáy là một hình vuông. Biểu thức diện tích bề mặt của cái hộp là một hàm theo chiều dài của cạnh đáy.

45. Cửa sổ người Moóc-măng có dạng hình chữ nhật với vòm là hình bán nguyệt. Nếu chu vi của cửa sổ là 10 m, biểu thức diện tích A của cửa sổ là một hàm theo chiều rộng x của cửa sổ đó.

46. Một hộp với phía trên rỗng được làm từ các miếng các tong hình chữ nhật với kích

thước 12 cm và 20 cm, cắt chúng ra thành các hình vuông bằng nhau với cạnh là x và xếp lại thành một cái hộp không nắp như hình vẽ. Biểu thức thể tích V của hộp là một hàm theo x.

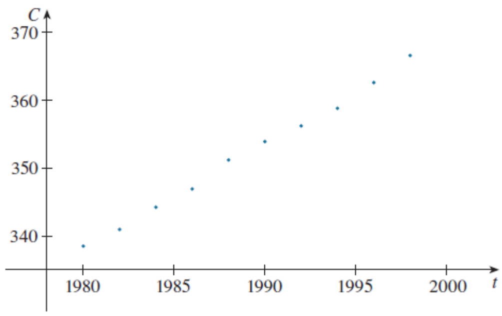


47. Một công ty taxi đưa ra giá hai đô la cho một km đầu tiên (hoặc một phần của km) và 20 đồng xu cho 10 km kế tiếp (hoặc một phần). Biểu diễn hàm chi phí C (đô la) của cuộc hành trình theo khoảng cách x (km) với $0 < x < 2$ và vẽ đồ thị của hàm này.
48. Trong một nước nào đó, thuế thu nhập được định như sau: Không đánh thuế trên thu nhập dưới 10000 đô. Thu nhập trên 10000 đô đến 20000 đô thì đánh thuế với tỷ lệ là 10 % Thu nhập trên 20000 đô thì đánh thuế là 15%.
(a) Vẽ đồ thị của hàm tỷ lệ thuế R theo thu nhập I.
(b) Mức thuế sẽ là bao nhiêu nếu thu nhập 14000 đô? 26000 đô?
(c) Vẽ đồ thị của hàm tổng mức thuế T theo thu nhập I .

1.1.2 Mô hình toán học

Ví dụ 1.1.3. Bảng 1.2.2 liệt kê mức trung bình CO_2 trong không khí, đo bằng phần triệu (ppm) tại Mauna Loa Observatory trong Hilo, Hawaii từ năm 1980 đến năm 2002. Dùng các dữ liệu trong bảng 1 để tìm mô hình cho mức CO_2

Year	CO_2 level (in ppm)
1980	338.5
1982	341.0
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0
1992	356.3
1994	358.9
1996	362.7
1998	366.7



Hình 1.2.2

Chú ý rằng những điểm dữ liệu hiện ra dưới dạng đường thẳng, vì thế mô hình được chọn trong trường hợp này là mô hình tuyến tính. Nhưng có nhiều đường thẳng có thể được xấp xĩ bởi các điểm dữ liệu này, do đó đường thẳng nào mà ta dùng? Từ đồ thị, có thể có một đường thẳng xuyên qua điểm đầu và điểm cuối dữ liệu. Hệ số góc của đường thẳng này là

$$\frac{372.9 - 338.7}{2002 - 1980} = \frac{34.2}{22} \approx 1.5545$$

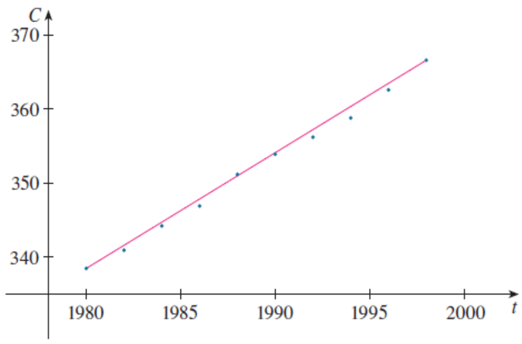
Và phương trình của nó là

$$C - 338.7 = 1.5545(t - 1980)$$

hoặc

$$C = 1.5545\,t - 2739.21 \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) đưa ra một mô hình tuyến tính có thể cho mức cacbon dioxide, đồ thị của nó trong Hình 1.2.3



Hình 1.2.3

Ví dụ 1.1.4. Nếu $f(x) = x^2$ và $g(x) = x - 3$, tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$.

Giải: Ta có

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3.$$

Ví dụ 1.1.5. Tìm $f \circ g \circ h$ nếu

$$f(x) = \frac{x}{x+1},\ g(x) = x^{10},\ h(x) = x + 3.$$

Giải:

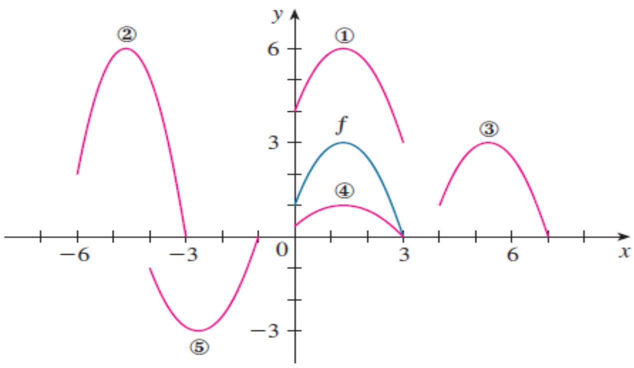
$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+3)) = f\left((x+3)^{10}\right) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10} + 1}$$

.

BÀI TẬP

1. Cho đồ thị của $y = f(x)$. Hãy gán mỗi phương trình với đồ thị của nó và đưa ra lý do cho sự lựa chọn của bạn.

$$\text{(a) } y = f(x-4) \text{ (b) } y = f(x)+3 \text{(c) } y = \frac{1}{3}f(x) \text{(d) } y = -f(x+4) \text{ (e) } y = 2f(x+6).$$



2 - 7. Tìm các hàm (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, và (d) $g \circ g$ và miền xác định của chúng.

2. $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = 2x + 1.$ 3. $f(x) = 1 - x^3,\ g(x) = \frac{1}{x}.$

4. $f(x) = \sin x,\ g(x) = 1 - \sqrt{x}.$ 5. $f(x) = 1 - 3x,\ g(x) = 5x^2 + 3x + 2.$

6. $f(x) = x + \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{x+1}{x+2}.$ 7. $f(x) = \sqrt{2x+3},\ g(x) = x^2 + 1.$

8 - 9. Tìm $f \circ g \circ h$.

8. $f(x) = \sqrt{x-1},\ g(x) = x^2 + 2,\ h(x) = x + 3.$

9. $f(x) = \frac{2}{x+1},\ g(x) = \cos x\ h(x) = \sqrt{x+3}.$

10 - 13. Biểu diễn hàm dưới dạng $f \circ g$.

10. $F(x) = (x^2+1)^{10}$. 11. $F(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. 12. $u(t) = \sqrt{\cos t}$. 13. $u(t) = \frac{\tan t}{1+\tan t}$.

14 - 16. Biểu diễn hàm dưới dạng $f \circ g \circ h$.

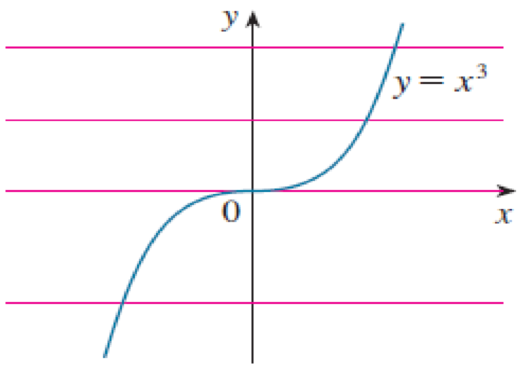
14. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$ 15. $H(x) = \sqrt[8]{2+|x|}.$ 16. $H(x) = \sec^4\left(\sqrt{x}\right).$

1.1.3 Hàm ngược

Ví dụ 1.1.6. Hàm số $f(x) = x^3$ có là hàm một - một không ?

Giải 1: Nếu $x_1 \neq x_2$, thì $x_1^3 \neq x_2^3$ (hai số khác nhau không thể có bậc ba giống nhau). Do đó theo định nghĩa, $f(x) = x^3$ là hàm một - một.

Giải 2: Từ Hình 1.4.3 ta nhận thấy rằng không có đường thẳng nằm ngang nào cắt đồ thị $f(x) = x^3$ nhiều hơn một lần. Do đó theo tiêu chuẩn đường thẳng ngang, f là hàm một - một.

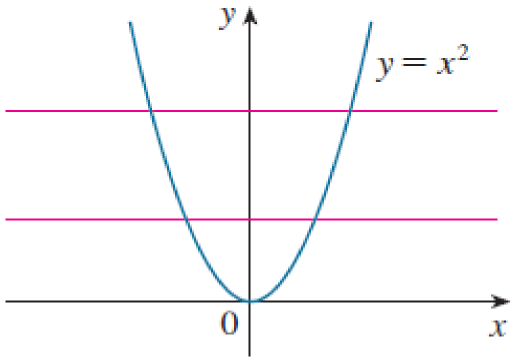


Hình 1.4.3

Ví dụ 1.1.7. Hàm số $g(x) = x^2$ có là hàm một - một không ?

Giải 1: Hàm này không phải là hàm một - một vì, chẳng hạn, $g(1) = 1 = g(-1)$ và vì 1 và -1 cho ra cùng một kết qủa giống nhau.

Giải 2: Từ Hình 1.4.4 ta nhận thấy rằng các đường thẳng nằm ngang cắt đồ thị g hơn một lần. Do đó, theo tiêu chuẩn đường thẳng ngang, g không phải là hàm một - một.



Hình 1.4.4

Ví dụ 1.1.8. Nếu $f(1) = 5, f(3) = 7$ và $f(8) = -10$, tìm $f^{-1}(7), f^{-1}(5)$ và $f^{-1}(-10)$.

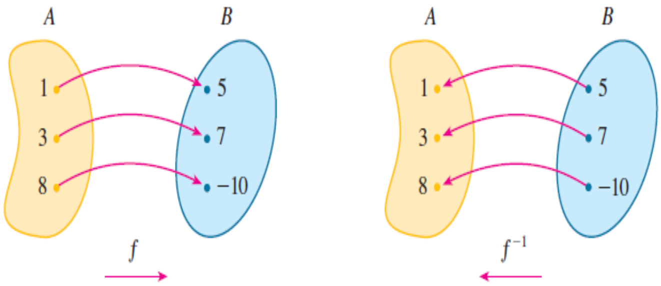
Giải: Từ định nghĩa f^{-1} ta có

$$f^{-1}(7) = 3 \text{ bởi vì } f(3) = 7.$$

$$f^{-1}(5) = 1 \text{ bởi vì } f(1) = 5.$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \text{ bởi vì } f(8) = -10.$$

Rõ ràng biểu đồ trong Hình 1.4.6 chỉ ra hàm ngược f^{-1} tác động lên f trong trường hợp này.



Hình 1.4.6

Ví dụ 1.1.9. Tìm hàm ngược của $f(x) = x^3 + 2$.

Giải: Trước tiên ta viết $y = x^3 + 2$. Sau đó ta giải phương trình x theo y :

$$x^3 = y - 2x = \sqrt[3]{y-2}$$

Cuối cùng ta đổi vai trò của x và y : $y = \sqrt[3]{x-2}$. Do đó, hàm ngược là

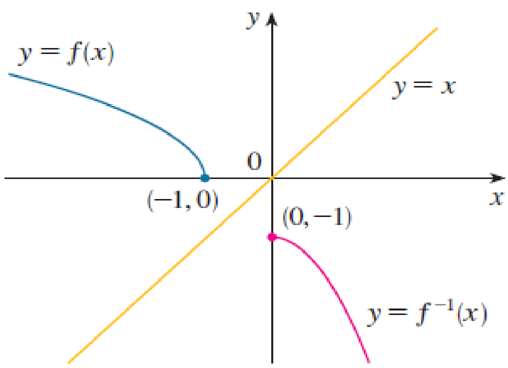
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}.$$

Ví dụ 1.1.10. Vẽ đồ thị của $f(x) = \sqrt{-1-x}$ và hàm ngược của nó trên cùng trục toạ độ.

Giải: Trước hết ta vẽ đường cong $y = \sqrt{-1-x}$ (nửa trên của parabol $y^2 = -1 - x$, hoặc $x = -y^2 - 1$) và sau đó lấy đối xứng qua đường thẳng $y = x$ để nhận được đồ thị f^{-1} (xem Hình 1.4.9). Bằng sự kiểm tra trên đồ thị của chúng, chú ý rằng biểu thức của f^{-1} là

$$f^{-1}(x) = -x^2 - 1, \ x \geq 0.$$

Vì thế đồ thị của f^{-1} là nửa bên phải của parabol $y^2 = -1 - x$ và từ Hình 1.4.9 dường như điều này là hợp lý.



Hình 1.4.9

BÀI TẬP

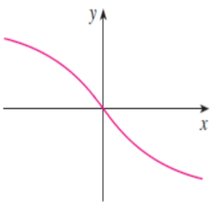
1 - 14. Hàm được cho bởi bảng các giá trị, đồ thị, công thức, hoặc mô tả bằng lời. Xác định xem hàm nào là hàm một - một.

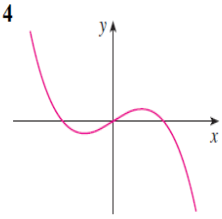
1.

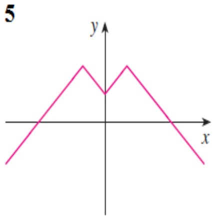
x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

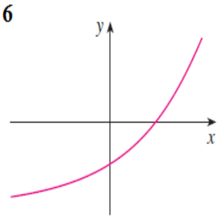
2.

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	2	4	8	16	2.0

3


4


5


6


7.$f(x) = \frac{1}{2}(x+5)$. 8. $f(x) = 1 + 4x - x^2$. 9. $g(x) = |x|$. 10. $g(x) = \sqrt{x}$.

11. $f(t)$ là trọng lượng của quả bóng sau t giây bơm.

12. $f(t)$ là trọng lượng của bạn tại thời điểm t.

13. Nếu f là hàm 1-1 sao cho $f(2) = 9$, giá trị của $f^{-1}(9)$ bằng bao nhiêu?

14. Cho $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$ với $-1 < x < 1$.

(a) Tìm $f^{-1}(3)$? (b) Tìm $f(f^{-1}(5))$?

15 - 20. Tìm công thức hàm ngược của các hàm sau:

15. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$. 16. $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$. 17. $f(x) = e^x$.

18. $f(x) = 2x^3 + 3$. 19. $f(x) = \ln(x+3)$. 20. $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

21-22. Tìm (a) Tập xác định của f; (b) f^{-1} và tập xác định của nó.

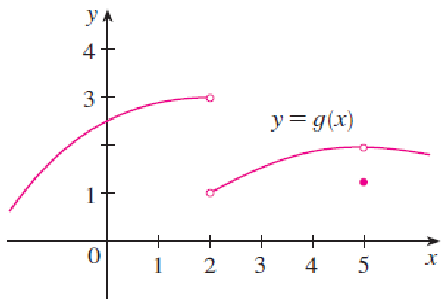
21. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$. 22. $f(x) = \ln(2 + \ln x)$.

1.2 Giới hạn và sự liên tục của hàm một biến

1.2.1 Khái niệm giới hạn

Ví dụ 1.2.1. Đồ thị của hàm g chỉ ra trong Hình 2.2.3. Sử dụng nó để tính các đại lượng sau (nếu chúng tồn tại).

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$. b) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.
d) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$. e) $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$. f) $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$.



Hình 2.2.3

Giải: Từ đồ thị ta thấy rằng giá trị của $f(x)$ tiến dần về 3 khi x tiến dần về 2 từ phía bên trái, nhưng $f(x)$ tiến dần về 1 khi x tiến dần về 2 từ phía bên phải. Vì thế:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 3$ và b) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 1$.

c) Do giới hạn trái và phải khác nhau nên $\lim\limits_{t\to 2} g(x)$ không tồn tại.

Đồ thị cũng chỉ ra rằng:

d) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x) = 2$ và e) $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x) = 2$.

f) Lần này giới hạn trái và phải bằng nhau nên ta có $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 2$. Mặc dù $g(5) \neq 2$.

Ví dụ 1.2.2. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ nếu nó tồn tại.

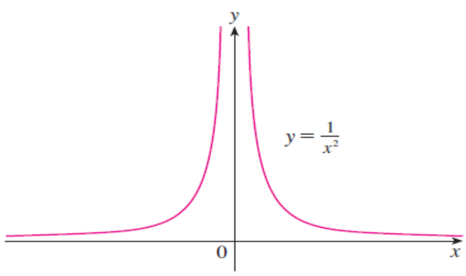
Giải Khi x còn tiến dần về 0 thì x^2 tiến dần về 0 và do đó $1/x^2$ tiến dần về một số rất lớn (xem bảng 2.2.4). Điều này thể hiện từ đồ thị hàm $f(x) = 1/x^2$ chỉ ra trong hình 2.2.5, giá trị của $f(x)$ tạo thành là một số lớn tuỳ ý khi chọn x đủ bé xấp xỉ 0, tức là giá trị của $f(x)$ không dần về một số, do đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

không tồn tại.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

Bảng 2.2.4



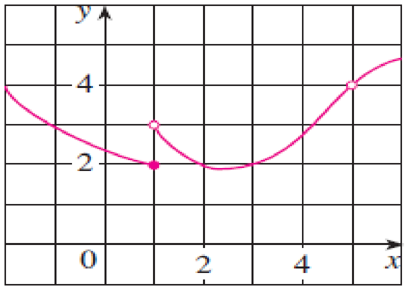
Hình 2.2.5

BÀI TẬP

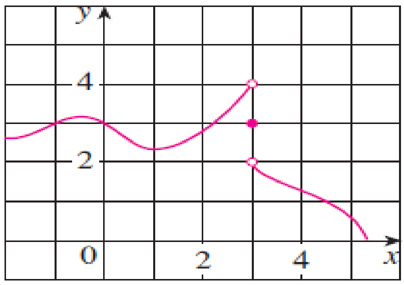
1. Giải thích bằng lời ý nghĩa của phương trình $\lim\limits_{x\to 2}(x) = 5$. Có thể xảy ra trường hợp $f(2) = 3$? giải thích.

2. Giải thích ý nghĩa của các đẳng thức $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 7$. Trong trường hợp này có thể tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ hay không, vì sao ?

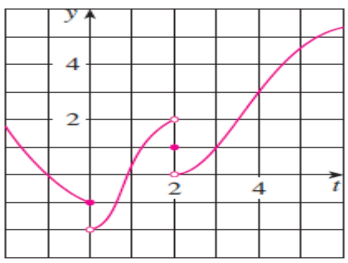
3. Sử dụng đồ thị đã cho để tính giá trị của mỗi đại lượng nếu nó tồn tại, và trong trường hợp không tồn tại, giải thích vì sao ? a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ e) $f(5)$.



4. Cho hàm f và đồ thị của nó, tính giá trị của mỗi đại lượng sau nếu tồn tại, nếu không tồn tại , giải thích vì sao ? a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e) $f(3)$.



5. Cho hàm f và đồ thị của nó, tính giá trị của mỗi đại lượng sau nếu nó tồn tại, nếu không tồn tại , giải thích vì sao ? a) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(t)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(t)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} g(t)$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(t)$ e) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(t)$ f) $\lim\limits_{x\to 2} g(2)$.



6. Phác hoạ đồ thị của các hàm dưới đây và sử dụng nó để xác định các giá trị của a sao cho $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại.

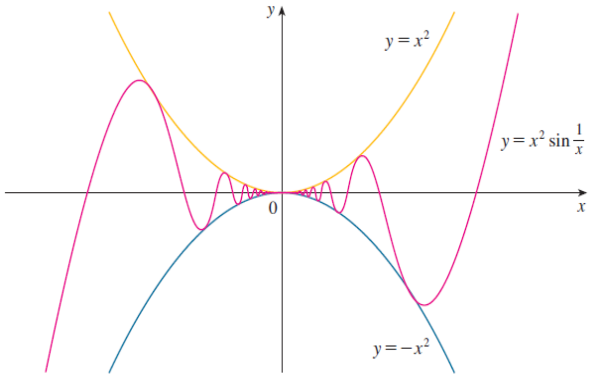
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x \text{ ,x-1} \\ x \text{ ,-1} \leq \text{x1} \\ (x-1)^2 \text{ ,x} \geq 1 \end{cases}$$

7. Sử dụng đồ thị của hàm $f(x) = 1/(1 + e1/x)$ để tìm giá trị của mỗi giới hạn nếu nó tồn tại, nếu không tồn tại , giải thích vì sao ? a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

1.2.2 Các quy tắc tính giới hạn

Ví dụ 1.2.3. Chỉ ra rằng $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

Giải: Trước tiên, chú ý rằng ta không thể sử dụng $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. bởi vì $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại (xem ví dụ 4 trong mục 2.2). Tuy nhiên, Từ $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ ta có (như minh hoạ trong Hình 2.3.2), $-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$



Hình 2.3.2

BÀI TẬP

1. Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 8$. Tìm các giới hạn sau nếu chúng tồn tại, nếu giới hạn không tồn tại, giải thích vì sao?

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + h(x)]$. b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^2$. c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$. d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$.
e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}$. f) $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$. g) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. h) $\lim\limits_{x\to a} \frac{2f(x)}{h(x)-f(x)}$.

2 - 7Tính giới hạn và chỉ ra từng bước sử dụng kết hợp các quy tắc giới hạn(s).

2. $\lim\limits_{x\to 4} (5x^2 - 2x + 3)$. 3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$. 4. $\lim\limits_{t\to -2} (t+1)^9(t^2-1)$.
5. $\lim\limits_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$.
7. a) phương trình sau sai vì sao? $\frac{x^2+x-6}{x-2} = x + 3$.
b) Dựa trên câu a, giải thích vì sao phương trình $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+3)$ là đúng.

8 - 22. Tính các giới hạn sau nếu chúng tồn tại.

8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$. 9. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$. 10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x+6}{x-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$. 12. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$. 13. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$.

14. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$. 15. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$. 16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$.

17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$. 18. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$. 19. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$.

20. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$. 21. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$.

23. Sử dụng định lý kẹp để chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos 20\pi x = 0.$$

24. Sử dụng định lý kẹp để chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x} = 0.$$

25. Cho $4x-9 \le f(x) \le x^2-4x+7$ với $x \ge 0$, tìm $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

26. Cho

$$2x \le g(x) \le x^4-x^2+2$$

với mọi x, tìm $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

27. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0$.

28. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} = 0$.

29-32.Tìm giới hạn nếu tồn tại, trong trường hợp không tồn tại, giải thích vì sao ? 29. $\lim\limits_{x\to 3} (2x+|x-3|)$. 30. $\lim\limits_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$. 31. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$.

32. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$.

33. Cho

$$g(x) = \begin{cases} -x \text{ , x} \le \text{-1} \\ 1-x^2 \text{ ,-1x1} \\ x-1 \text{ ,x1} \end{cases}$$

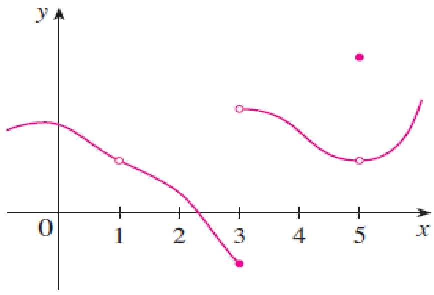
Tính giới hạn sau nếu tồn tại:

i) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$. ii) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$. iii) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

iv) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$. v) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$. vi) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

1.2.3 Hàm liên tục

Ví dụ 1.2.4. Hình 2.4.2 chỉ ra đồ thị của hàm f. f gián đoạn tại đâu? Vì sao?



Hình 2.4.2

Giải: Quan sát thấy hàm f gián đoạn tại $a = 1$ vì đồ thị của chúng bị bẻ gẫy tại đó. Nguyên nhân chính là do $f(1)$ không xác định. Đồ thị cũng bị bẻ gẫy tại $a = 3$. Nhưng nguyên nhân gián đoạn ở đây thì khác, $f(3)$ xác định nhưng $\lim\limits_{t\to 3} f(x)$ không tồn tại (bởi vì giới hạn trái và phải khác nhau). Vì thế f gián đoạn tại 3. Tại $a = 5$ thì sao? $f(5)$ xác định và $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ (vì giới hạn trái bằng giới hạn phải) nhưng $\lim\limits_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$. Do đó f gián đoạn tại 5.

Ví dụ 1.2.5. Các hàm sau gián đoạn tại đâu?

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}.\ b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{,x} \neq 0 \\ 1 & \text{,x=0} \end{cases}.\ c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{,x} \neq 2 \\ 1 & \text{,x=2} \end{cases}.\ d)\ f(x) = [[x]]$$

Giải:

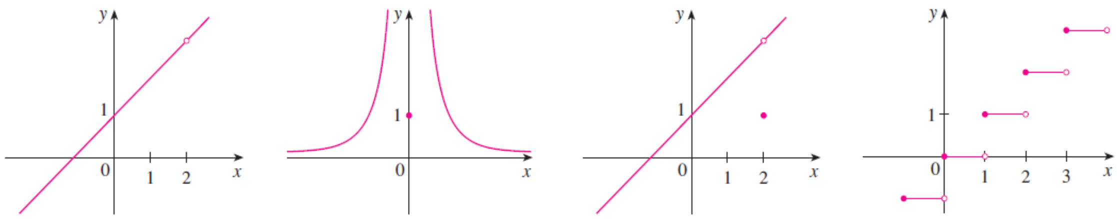
a) Chú ý rằng $f(2)$ thì không xác định, do đó f gián đoạn tại 2, sau này ta sẽ thấy rằng f liên tục tại mọi x khác 2.

b) $f(0)$ xác định nhưng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ không tồn tại. Vì thế f gián đoạn tại 0.

c) $f(2) = 1$ xác định và $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = 3$ tồn tại nhưng $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Do đó f không liên tục tại 2.

d) Hàm nguyên lớn gần nhất $f(x) = [[x]]$ gián đoạn tại tất cả các điểm x nguyên bởi vì $\lim\limits_{x\to n} [\![x]\!]$ không tồn tại nếu n là số nguyên.

Hình 2.4. 3 chỉ ra đồ thị của các hàm trong ví dụ.



(a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ (b) $f(x)=\begin{cases}1/x^2 & \text{if } x\neq 0\\ 1 & \text{if } x=0\end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x\neq 2\\ 1 & \text{if } x=2\end{cases}$ (d) $f(x)=[\![x]\!]$

Hình 2.4.3

Ví dụ 1.2.6. Với mỗi số nguyên n, hàm f(x) = [[x]] [xem Hình 2.4.3 (d)] liên tục phải nhưng không liên tục trái bởi vì

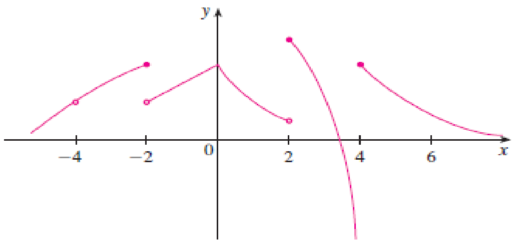
$$\lim_{x\to n^+} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to n^+} [\![\mathrm{x}]\!] = \mathrm{n} = \mathrm{f(n)}.$$

Nhưng

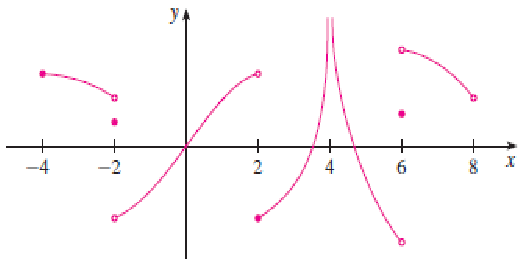
$$\lim_{x\to n^-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to n^-} [\![\mathrm{x}]\!] = \mathrm{n\text{-}1} \neq \mathrm{f(n)}.$$

BÀI TẬP

1. Từ đồ thị của hàm f cho dưới đây, hãy chỉ ra điểm nào mà hàm số không liên tục tại đó và giải thích tại sao?



2. Từ đồ thị của g hay chỉ ra các khoảng mà g liên.



3- 6. Giải thích tại sao các hàm sau đây không liên tục tai a.

3. $f(x) = \ln|x-2|$; $\quad a = 2.$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & if\ x \neq 1 \\ 2 & if\ x = 1 \end{cases} \quad a = 1.$

5. $f(x) = \begin{cases} e^x & if\ x < 0 \\ x^2 & if\ x \geq 0 \end{cases} \quad a = 0.$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & if\ x \neq 1 \\ 1 & if\ x = 1 \end{cases} \quad a = 1.$

7-12. Giải thích tại sao các hàm sau đây liên tục trên miền xác định của nó.

7. $F(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+6}.$ 8. $f(t) = 2t + \sqrt{25-t^2}.$ 9.$f(x) = e^x \sin 5x.$

10. $F(x) = \sin^{-1}(x^{2^2}-1).$ 11. $G(t) = \ln(t^4-1).$ 12.$H(x) = \cos(e^{\sqrt{x}}).$

13 - 14. Xét tính liên tục của hàm số sau và minh hoạ bằng đồ thị.

13. $y = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}.$ 14. $y = \ln(\tan^2 x).$

15 - 18. sử dụng tính liên tục để tính giới hạn.

15. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}.$ 16. $\lim\limits_{x\to\pi} (x+\sin x).$ 17. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^{2^2}-x}.$ 18.$\lim\limits_{x\to 2} \arctan(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}).$

19 - 20. Chứng minh rằng f liên tục trên $R = (-\infty; +\infty)$.

19. $f(x) = \begin{cases} x^2 \;\; if \; x < 0 \\ \sqrt{x} \; if \;\; x \geq 0 \end{cases}$. 20 $f(x) = \begin{cases} \sin x & if \;\; x < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x & if \;\; x \geq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

21. Tìm các điểm mà tại đó hàm

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & if \; x < 0 \\ e^x & if \, 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & if \;\; x > 1 \end{cases}$$

không liên tục. Tại các điểm này hàm f liên tục trái liên tục phải hoặc không liên tục ?phát hoạ đồ thị của hàm f.

22 - Sử dụng định lý và giá trị trung gian để chứng minh rằng phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng cho trước.

22. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2).$ 23. $x^2 = \sqrt{x + 1}, \quad (1, 2).$

24. $cosx = x, \quad (0, 1).$ 25. $lnx = e - x, \quad (1, 2)$

26 - 27. a) Chứng minh rằng phương trình sau có it nhất một nghiệm.

b) Dùng cách tính toán của bạn hãy tìm khoảng với chiều dài của khoảng có chứa nghiệm của phương trình.

26. $\cos x = x^3.$ 42. $\ln x = 3 - 2x.$

1.2.4 Giới hạn bằng vô cùng - Giới hạn tại vô cùng

Ví dụ 1.2.7. Tìm các giới hạn:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x - 3}; \lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3}.$$

Giải.

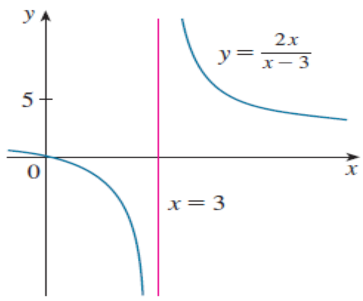
Nếu x tiến về 3 nhưng nhỏ hơn 3 thì $x - 3$ tiến đến số dương nhỏ và $2x$ tiến về 6. Vì thế $2x/(x - 3)$ tiến đến số dương lớn. Điều này ta viết

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x - 3} = +\infty.$$

Nếu x tiến về 3 nhưng lớn hơn 3 thì $x - 3$ tiến đến số âm nhỏ và $2x$ tiến về 6. Vì thế $2x/(x - 3)$ tiến đến số âm lớn. Điều này ta viết

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3} = -\infty.$$

Đồ thị của hàm y = 2x/(x-3) được cho trong hình 1.2.8. Đường $x = 3$ được gọi là tiệm cận đứng.

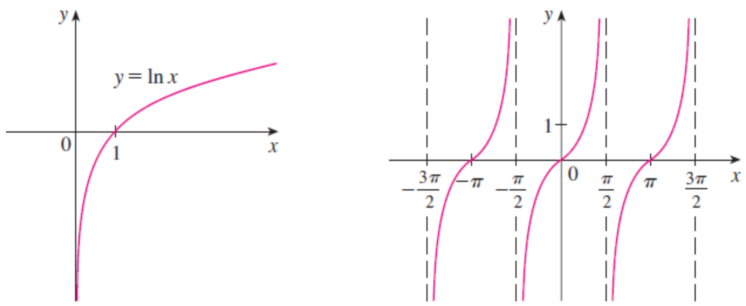


Hình 1.2.8

Hai hàm rất quen thuộc đối với chúng ta đều có các tiệm cận đứng là $y = \ln x$ và $y = \tan x$. Ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Và đường $x = 0$ (trục y) là tiệm cận đứng. Trên thực tế, đường này cũng là tiệm cận đứng của đường cong $y = \log_a^x$ $(a > 1)$ và $x = \frac{\pi}{2}$ là tiệm cận đứng. Trên thực tế, đường $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (n là số nguyên là các tiệm cận ngang của hàm $y = \tan x$.



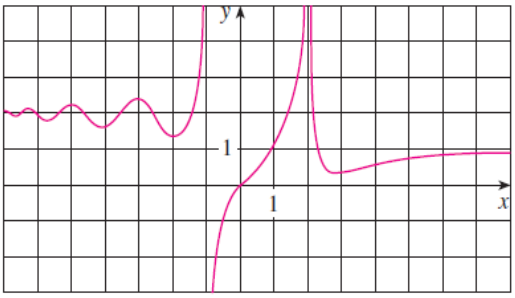
Hình 1.2.9

BÀI TẬP

1. Với đồ thị hàm số $f(x)$ trong hình vẽ hãy xác định:

a/ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. b/ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$. c/ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

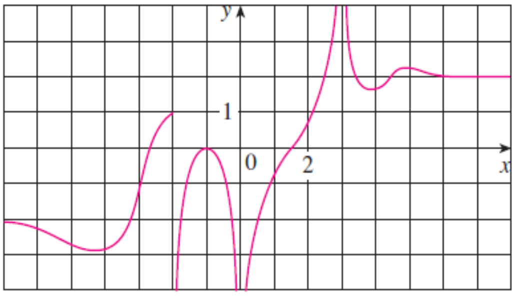
d/ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$. e/ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. f/ Phép toán khác.



2. Với đồ thi hàm số $g(x)$ trong hình vẽ hãy xác định:

a/ $\lim_{x\to\infty} g(x)$. b/ $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. c/ $\lim_{x\to 3} g(x)$.

d/ $\lim_{x\to 0} g(x)$ e/ $\lim_{x\to -2^+} g(x)$. f/ Phép toán khác.



3 - 20. Tìm các giới hạn.

3. $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{x+3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 5^+} \ln(x-5)$.

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sec x$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{x-4}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$.

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{t^2+2}{t^3+t^2-1}$.

11. $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{4u^4+5}{(u^2-2)(2u^2-1)}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+x}-3x$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\grave{}^2 x}{x^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}(x^4-x^2)$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7-1}{x^6+1}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-5x^2)$.