

HẠNG CỦA MA TRẬN

Ví dụ:

$$\text{Cho } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ta có một số định thức con cấp 2:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -9, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10; \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\text{Cho } B = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có một số định thức con cấp 2:

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad |B_2| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -36, \quad |B_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ta có một số định thức con cấp 3:

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad |B_5| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |B_6| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ta có một số định thức con cấp 4:

$$|B_7| = \begin{vmatrix} 12 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad |B_8| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*. Hạng của ma trận A, kí hiệu $r(A)$ (hoặc **rank(A)**) là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A.

Ví dụ:

$$\text{Ma trận A có } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \text{ nên } r(A) = 3.$$

$$\text{Cho } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B \text{ có định thức con cấp 2: } |B_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Các định thức con cấp 3 của B :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy $r(B) = 2$.

*. **Nhận xét:**

- Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.
- Ma trận không có hạng bằng 0.
- Ma trận A có $r(A) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tồn tại 1 định thức con cấp } k \text{ khác 0.} \\ \text{Tất cả các định thức con có cấp lớn hơn } k \text{ đều} \\ \text{bằng 0.} \end{cases}$