1. Một số phương pháp tìm hạng của ma trận

- Phương pháp 2: dùng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận đưa ma trận đã cho về ma trận bậc thang. Khi đó, hạng của ma trận bằng số các hàng khác 0 của ma trận bậc thang.

Ví dụ 1: Tìm hạng của ma trận sau:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vậy : r(A) = 3.

Ví dụ 2: Tìm hạng của ma trận sau:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có :

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - h_1 \\ h_4 \to h_4 - h_1}]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4 \to h_4 + h_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy : r(B) = 3.

Ví dụ 3 : Biện luận theo a hạng của ma trận sau:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & a \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Biến đổi C về ma trận bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & a \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-8 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-8 \end{bmatrix}$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} a = 8 \Rightarrow r(A) = 2 \\ a \neq 8 \Rightarrow r(A) = 3 \end{array}\right.$.

Ví dụ 4 : Tìm a để hạng của ma trận sau bằng 4:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & \text{a} \end{bmatrix}$$

Biến đổi D về ma trận bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & \text{a} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_4 \to h_4 + h_2 \\ h_5 \to h_5 - h_1}]{\substack{h_2 \to h_2 - 2h_1 \\ h_3 \to h_3 + h_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \text{a} \end{bmatrix} \xrightarrow[h_5 \to h_5 + h_2]{h_3 \to h_3 + h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{a} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_5 \to 2h_5 - h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\text{a}-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\text{a}-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Để r(D) = 4 thì $2\text{a} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \text{a} \neq 1$