TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA TRƯỜNG VECTƠ

Chúng ta biết được rằng, Công thực hiện bởi một lực biến thiên $f(x)$ trong việc di chuyển một vật từ a đến b dọc theo trục x là: $W = \int_a^b f(x)dx$.

Với trường hợp lực không thay đổi F di chuyển một vật từ điểm P đến điểm Q thì Công thực hiện được tính theo công thức: $W = F.D$, trong đó $D = \overrightarrow{PQ}$ là vectơ di chuyển.

Trong phần này, chúng ta sẽ xét Công thực hiện bởi một lực để di chuyển một vật dọc theo một đường cong trơn C.

* Giả sử $F = P\mathrm{i} + Q\mathrm{j} + R\mathrm{k}$ là một trường lực liên tục trên $\mathbb{R}^3$ (tương tự cho trường hợp trên R^2 với $R = 0$).

+. Chia C thành các đoạn con $P_{i-1}P_i$ với độ dài Δs_i bằng cách chia khoảng tham số $[a,b]$ thành các khoảng nhỏ có độ dài bằng nhau

+. Trên đoạn cong nhỏ thứ i ta chọn một điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ (tương ứng ta có giá trị tham số t_i^*).

+. Nếu Δs_i nhỏ thì khi vật di chuyển từ P_{i-1} đến P_i theo đường cong nó sẽ tiến theo phương của $T(t_i^*)$ đến vectơ tiếp xúc đơn vị $T(t_i^*)$ tại P_i.

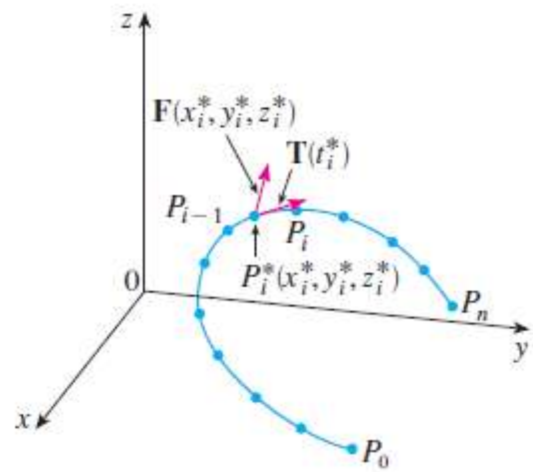
Do đó Công thực hiện bởi lực F để di chuyển vật từ P_{i-1} đến P_i được tính xấp xỉ bằng:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

Và do đó Công thực hiện để di chuyển vật trên toàn bộ đường cong C xấp xỉ bằng:

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

Trong đó $T(x,y,z)$ là vectơ tiếp xúc đơn vị tại điểm (x,y,z) trên C.



Chúng ta thấy việc xấp xỉ của chúng ta càng chính xác khi n càng lớn. Do đó chúng ta định nghĩa Công thực hiện bởi trường lực F như sau:

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

* Nếu đường cong C cho bởi phương trình vectơ $\mathrm{r}(t) = x(t)\mathrm{i} + y(t)\mathrm{j} + z(t)\mathrm{k}$ thì ta có: $T(t) = \dfrac{\mathrm{r}'(t)}{|\mathrm{r}'(t)|}$. Do đó công thức trên được viết lại như sau:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Tích phân trên thường được viết tắt là $\int_C F.d\mathrm{r}$ và ta có định nghĩa sau cho tích phân đường trên một trường vectơ liên tục bất kỳ:

**** Định nghĩa:***

Cho F là một trường vectơ liên tục trên một đường cong trơn C cho bởi hàm vectơ $\mathrm{r}(t),\ a \le t \le b$. Khi đó tích phân đường của F dọc theo C là:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Ví dụ 1: Tìm công thực hiện bởi trường lực $F(x, y) = x^2\mathrm{i} - xy\mathrm{j}$ trong việc di chuyển một vật theo một phần tư đường tròn $\mathrm{r}(t) = \cos t\,\mathrm{i} + \sin t\,\mathrm{j}$ với $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Giải.

$$F(r(t)) \;=\; \cos 2t\, i - \cos t \sin t\, j$$

$$r'(t) \;=\; -\sin t i + \cos t j$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-2\cos^2 t \sin t\right) dt \\ &= 2\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

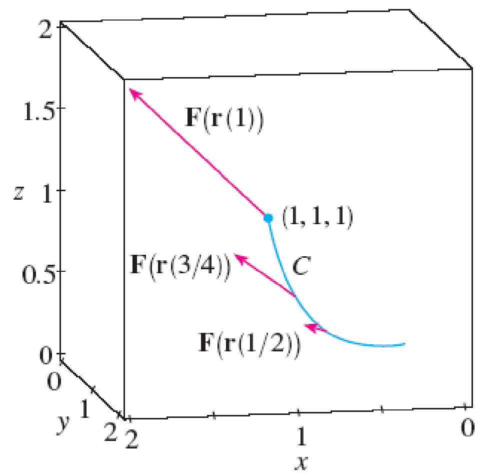
Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_C F.d\,\mathrm{r}$ trong đó $F(x, y, z) = xy\,\mathrm{i} + yz\,\mathrm{j} + zx\,\mathrm{k}$ và C là đường cong cho bởi: $x = t,\; y = t^2,\; z = t^3,\; 0 \le t \le 1$.

Giải.

$$r(t) = ti + t^2 j + t^3 k, r'(t) = i + 2tj + 3t^2 k$$

$$F(r(t)) = t^3 i + t^5 j + t^4 k$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t))\, dt \\ &= \int_0^1 \left(t^3 + 5t^6\right) dt \\ &= \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}\end{aligned}$$



* Giả sử trường vectơ F trên R^3 được cho bởi dạng thành phần như sau:

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Khi đó chúng ta có:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot (x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt$$

Do đó chúng ta có được:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$