TÍCH PHÂN LẶP

Bài tập

1–2 Tìm $\int_0^5 f(x, y)\,dx$ và $\int_0^1 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$

2. $f(x, y) = y + xe^y$

3–14 Tính các tích phân lặp.

3. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\,dy\,dx$

4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^2 \int_0^4 y^3e^{2x}\,dy\,dx$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\,dx\,dy$

7. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2\cos x)\,dx\,dy$

8. $\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx$

10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 v(u + v^2)^4\,du\,dv$

12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

13. $\int_0^2 \int_0^\pi r\sin^2\theta\,d\theta\,dr$

14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\,ds\,dt$

15–22 Tính các tích phân hai lớp.

15. $\iint_R \sin(x - y)\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

16. $\iint_R (y + xy^{-2})\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

18. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

19. $\iint_R x\sin(x + y)\,dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1 + xy}\,dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R ye^{-xy}\,dA, \quad R = [0, 2] \times [0, 3]$

22. $\iint_R \frac{1}{1 + x + y}\,dA, \quad R = [1, 3] \times [1, 2]$

23–24 Phác họa hình khối có thể tích được cho bởi tích phân lặp.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

25. Tìm thể tích của hình khối nằm dưới mặt phẳng $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ và nằm trên hình chữ nhật $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.

26. Tìm thể tích của hình khối nằm dưới bề mặt paraboloid hyperbolic $z = 3y^2 - x^2 + 2$ và nằm trên hình chữ nhật $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

27. Tìm thể tích của hình khối nằm dưới paraboloid elliptic $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ và nằm trên hình chữ nhật $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

28. Tìm thể tích của hình khối được bao bởi mặt phẳng $z = 1 + e^x \sin y$ và các mặt phẳng $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$, và $z = 0$.

29. Tìm thể tích của hình khối được bao bởi mặt phẳng $z = x \sec^2 y$ và các mặt phẳng $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, và $y = \pi/4$.

30. Tìm thể tích của hình khối nằm ở góc phần tám đầu tiên, được giới hạn bởi mặt trụ $z = 16 - x^2$ và mặt phẳng $y = 5$.

31. Tìm thể tích của hình khối được giới hạn bởi paraboloid $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ và các mặt phẳng $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, và $y = 4$.

32. Vẽ hình khối nằm giữa bề mặt $z = 2xy/(x^2 + 1)$ và mặt phẳng $z = x + 2y$, được giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, và $y = 4$. Tìm thể tích của hình khối.

CAS **33.** Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tìm giá trị chính xác của tích phân $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, với $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Sau đó sử dụng CAS để vẽ hình khối có thể tích được cho bởi tích phân này.

CAS **34.** Vẽ hình khối nằm giữa các bề mặt $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ và $z = 2 - x^2 - y^2$ với $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tính xấp xỉ thể tích của hình khối này, lấy chính xác đến 4 chữ số thập phân.

35–36 Tìm giá trị trung bình của f trên hình chữ nhật cho trước.

35. $f(x, y) = x^2$, $\quad R$ có các đỉnh $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

36. $f(x, y) = e^y\sqrt{x + e^y}$, $\quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

37–38 Sử dụng tính đối xứng để tính các tích phân hai lớp.

37. $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1 + x^4}\, dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

38. $\displaystyle\iint_R (1 + x^2 \sin y + y^2 \sin x)\, dA$, $\quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

CAS **39.** Sử dụng CAS để tính các tích phân lặp.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{và} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

Các đáp án tìm được có mâu thuẫn với Định lý Fubini không? Hãy giải thích tại sao.

40. (a) Hãy cho biết các Định lý Fubini và Clairaut tương tự nhau như thế nào?
(b) Nếu $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ và

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

với $a < x < b$, $c < y < d$, chứng minh rằng $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.