

BÀI TẬP ÔN TẬP THI KẾT THÚC HỌC PHẦN TOÁN CAO CẤP C2
LỚP K 19 MTH 102

Bài 1: Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Tính AB ; $A^{-1}B$

b) Tìm ma trận X để $AX = -3B$

Bài 2: Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Tính $2BA - 5I_3$

b) Tính $A^{-1} \cdot \frac{1}{2}C^T$

Bài 3: Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X + 2I_3 = 4 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^T$$

Bài 4: Cho phương trình $AX = B$, trong đó $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A .

b) Dùng ma trận nghịch đảo trong (a), hãy tìm ma trận X thỏa mãn phương trình trên.

Bài 5: Tìm ma trận $f(A)$ biết:

a) $f(x) = -x^3 + 4x^{-1} - 7$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ và $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Bài 6: Tìm hạng của các ma trận sau theo m:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} m & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 7: Tính các định thức sau

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 8: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 1 \end{cases} ; \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + 3z - 2t = 1 \\ 2x + 2y + 4z - t = 1 \\ 3x + 3y + 5z - 2t = 1 \\ 2x + 2y + 8z - 3t = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases} ; \qquad \text{d) } \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + z = 3 \\ 2x + 3y + z = -3 \end{cases}$$

Bài 9: Giải hệ bằng phương pháp Cramer

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases} ; \qquad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Bài 10: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - z = -m \\ 3x + y = 1 \\ -x + 2y + 6z = m \end{cases} .$

a) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} .$

b) Giải hệ phương trình trên theo tham số m .

Bài 11. Trong không gian R^2 xét hai hệ

$$H_1 = \{x_1 = (1, 0); x_2 = (0, 1)\}$$

$$H_2 = \{y_1 = (2, 1); y_2 = (-3, 4)\}$$

- Chứng minh $H_1; H_2$ là hai cơ sở trong không gian R^2 .
- Tìm ma trận chuyển cơ sở từ H_1 sang H_2 .
- Tính $[x]_{H_2}$, rồi từ đó suy ra $[x]_{H_1}$ với $x = (3, -5)$.
- Cho $(y)_{H_2} = (1, 3)$, tìm vectơ $y \in R^2$

Bài 12. Trong không gian R^3 cho hai hệ

$$B_1 = \{x_1 = (2, 1, 1); x_2 = (2, -1, 1); x_3 = (1, 2, 1)\}$$

$$B_2 = \{z_1 = (3, 1, -5); z_2 = (1, 1, -3); z_3 = (-1, 0, 2)\}$$

- Chứng minh rằng $B_1; B_2$ là các cơ sở trong không gian R^3 .
- Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B_2 sang B_1 .
- Cho $(x)_{B_2} = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở B_1 và tìm vectơ $x \in R^3$.

Bài 13. Tìm điều kiện m để:

- Hệ $\{u_1 = (1, 3); u_2 = (-1, m)\}$ sinh ra không gian R^2 .
- Vectơ $x = (2, 0, 6)$ là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1 = (2, 1, 4); u_2 = (1, -1, -3); u_3 = (3, 2, m)\}$.
- Hệ $\{u_1 = 1 - x + x^2; u_2 = 2x + mx^2; u_3 = 2 - x; u_4 = -1 - 3x^2\}$ là hệ sinh của $P_2[x]$

Bài 14. Hệ các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

- $B = \{p_1 = 1 + 2x + x^2; p_2 = 3 - x + x^2\}$ trong không gian vectơ $P_2[x]$
- $S = \{(1, 3, 3); (1, 3, 4); (1, 4, 3); (6, 2, 1)\}$ trong R^3
- $W = \{(2, 1, 0, 1); (4, 2, 0, 2); (1, 2, 5, 0)\}$ trong R^4
- $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ trong $M_2(R)$

Bài 15. Hệ các vectơ sau có là hệ sinh không ?

- $H = \{p_1 = 1 + 2x - x^2; p_2 = -2x + x^2; p_3 = -1 + 5x; p_4 = 2 - x^2\}$
- $H = \{(1, 2, 3, 0); (0, -1, 2, -3); (2, 6, 2, 4); (1, 3, 2, 6)\}$

Bài 16. Cho hệ $\{u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (0, 1, 1)\}$ trong R^3 .

- Chứng minh hệ $\{u_1, u_2\}$ là độc lập tuyến tính.
- Tìm vectơ u_3 để $\{u_1, u_2, u_3\}$ là độc lập tuyến tính.

Bài 17. Trong P_2 xét các cơ sở $B = \{p_1, p_2, p_3\}$, $B' = \{q_1, q_2, q_3\}$ với:

$$p_1 = 2 - x + 4x^2, \quad p_2 = 3 + 6x + 2x^2, \quad p_3 = 1 + 10x - 4x^2$$

$$q_1 = 3 + x + x^2, \quad q_2 = 2 - x + 5x^2, \quad q_3 = 4 - 3x^2$$

- a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B' sang cơ sở B .
- b) Tìm ma trận tọa độ $[p]_B$ với $p = -3 + 5x$, rồi suy ra $[p]_{B'}$.
- c) Cho $[q]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, hãy tìm đa thức $q \in P_2[x]$

Bài 18: Tìm tổng nếu có của các chuỗi sau:

1. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots$
2. $\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$
3. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots$
4. $\frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-5)^n}{7^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{6^n}$
7. $3 - 2 + \frac{2}{5} - \frac{8}{25} + \frac{32}{125} - \dots$

Bài 19: Hãy biểu diễn các số sau thành số hữu tỷ.

- a) $0,\bar{4} = 0,444444\dots$ b) $0,\overline{73} = 0,737373\dots$
- c) $7,\overline{6543} = 7,6543543\dots$ d) $0,\overline{254} = 0,2545454\dots$

Bài 20. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt{n^2 - n})$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n - 10}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \ln n}{n^2 - 1}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 4^n n!}{2n} \right)$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! 5^n}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{3^n \cdot n!}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{2^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n + 1)!}{8^n \cdot n^2}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^3 + 7}}$
14. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{5^n + 3n}$

16. $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \dots$

17. $\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{5^n}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^3 - 5n}{2n^3 + 1}\right)^{2n}$

Bài 21. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5n+2}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \cdot 2^n}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{n^5+1}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+3)4^n}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{n+5}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n+1)3^n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2}x^n$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$