TÍCH PHÂN LẶP

Giả sử f là một hàm 2 biến xác định và liên tục trên miền hình chữ nhật đóng $R=[a,b]\times[c,d]$. Chúng ta ký hiệu $\int_c^d f(x,y)dy$ để chỉ khi x không thay đổi và $f(x,y)$ được lấy tích phân tương ứng với y từ $y=c$ đến $y=d$. Cách làm này được gọi là tích phân riêng tương ứng với y. Như thế ta có $\int_c^d f(x,y)dy$ là một số phụ thuộc vào x và do đó ta định nghĩa một hàm theo biến x như sau:

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

Bây giờ lấy tích phân hàm A tương ứng với x từ $x=a$ đến $x=b$ ta có được:

$$\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Tích phân bên vế phải của phương trình [1] được goi là tích phân lặp. Khi mở các dấu móc chúng ta nhận được:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Tương tự ta cũng có:

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy$

Giải.

(a) Xem x là hằng số ta có

$$\int_1^2 x^2 y\,dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2$$

Lấy tích phân cho hàm số $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ đối với x từ 0 đến 3

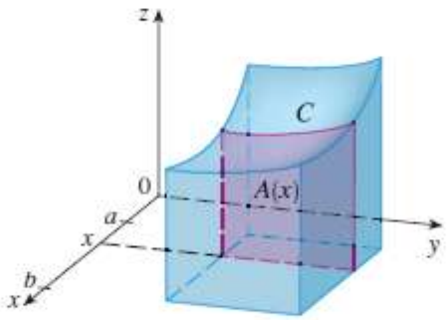
$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\,dy \right] dx = \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{x^3}{2} \Big]_0^3 = \frac{27}{2}$$

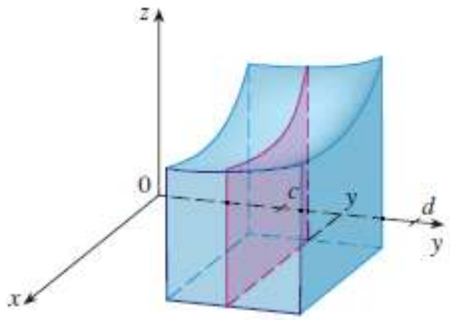
b) Lấy tích phân đối với x

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 [\int_0^3 x^2 y\,dx]dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9y\,dy = 9\frac{y^2}{2} \Big]_1^2 = \frac{27}{2}$$

* ***Định lý Fubini***: Nếu f là một hàm hai biến liên tục trên miền $R = \{(x,y) / a \le x \le b, c \le y \le d\}$ thì khi ấy ta có:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$





* ***Nhận xét***: Từ định lý Fubini, ta có được kết quả sau:

Ví dụ 2 : Tính tích phân kép $\iint\limits_R \left(x - 3y^2\right) dA$ trong đó $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$. So sánh với ví dụ 3 ở phần 2.1

<u>**Giải :**</u> C1 :Theo định lý Fubini

$$\iint\limits_R \left(x - 3y^2\right) dA = \int_0^2 \int_1^2 \left(x - 3y^2\right) dy dx = \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7) dx = \left.\frac{x^2}{2} - 7x\right]_0^2 = -12$$

C2: Tiếp tục áp dụng định lý Fubini tuy nhiên lần này lấy tích phân với x trước ta có :

$$\iint_R \left(x-3y^2\right)dA=\int_1^2\int_0^2\left(x-3y^2\right)dxdy \qquad =\int_1^2\left[\frac{x^2}{2}-3xy^2\right]_{x=0}^{x=2}dy$$

$$=\int_1^2\left(2-6y^2\right)dy=2-2y^3\Big]_1^2=-12$$

Ví dụ 3 : Tính giá trị của tích phân $\iint_R y\sin(xy)dA$ trong đó

$$R=[1,2]\times[0,\pi]$$

Giải : C1 : lấy tích phân đối với x ta có

$$\iint_R y\sin(xy)dA=\int_0^\pi\int_1^2 y\sin(xy)\,dxdy=\int_0^\pi\left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2}dy$$

$$=\int_0^\pi\left(-\cos 2y+\cos y\right)dy \qquad =-\frac{1}{2}\sin 2y+\sin y\Big]_0^\pi=0$$

C2 : Nếu chúng ta đảo ngược thứ tự lấy tích phân ta có

$$\iint_R y\sin(xy)dA=\int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dydx$$

Để tính tích phân trong ta áp dụng phương pháp tích phân từng phần

$$u=y \qquad dv=\sin(xy)dy$$

$$du=dy \qquad v=-\frac{\cos(xy)}{x}$$

Do đó

$$\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy=-\frac{y\cos(xy)}{x}\Bigg]_{y=0}^{y=\pi}+\frac{1}{x}\int_0^\pi\cos(xy)\,dy$$

$$=-\frac{\pi\cos\pi x}{x}+\frac{1}{x^2}\left[\sin(x,y)\right]_{y=0}^{y=\pi} \qquad =-\frac{\pi\cos\pi x}{x}+\frac{\sin\pi x}{x^2}$$

Nếu lấy tích phân số hạng đầu bởi các phần với $u=-\frac{1}{x}$ và $dv=\pi\cos\pi x dx$, ta được

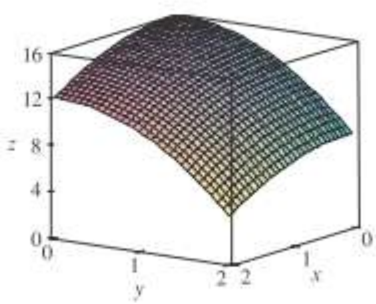
$$du=\frac{dx}{x^2}\ ,\ v=\sin\pi x \quad \text{và}$$

$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x}\right)dx=-\frac{\sin\pi x}{x}-\int\frac{\sin\pi x}{x^2}dx$$

Vì thế $$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x}+\frac{\sin\pi x}{x^2}\right)dx=-\frac{\sin\pi x}{x}$$

Do đó $$\int_1^2\int_0^{\pi} y\sin(xy)\,dydx = \left[-\frac{\sin\pi x}{x}\right]_1^2 = -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin\pi = 0$$

Ví dụ 4 : Tìm thể tích của vật thể S giới hạn trong elip paraboloid có phương trình $x^2 + 2y^2 + z = 16$ nằm trên hình vuông $R = [0,2]\times[0,2]$ (xem hình 5).



Theo định lý Fubini ta có:

$$V = \iint_R \left(16 - x^2 - 2y^2\right)dA = \int_0^2\int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right)dxdy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right)dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$

Trong trường hợp đặc biệt khi *f(x,y)* có thể phân tích thành thừa số như là một phần hàm số của riêng *x* và một phần hàm số của riêng *y* thì tích phân kép có thể được biểu diễn bằng 1 dạng đơn giản riêng. Để xác định giả sử rằng $f(x,y) = g(x)h(y)$ và $R = [a,b]\times[c,d]$ theo định lý **Fubini** ta có

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d\int_a^b g(x)h(y)dxdy = \int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)dx\right]dy$$

Trong tích phân trong *y* là hằng số và *h(y)* là hằng số do đó ta có thể viết thành

$$\int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)dx\right]dy = \int_c^d\left[h(y)\left(\int_a^b g(x)dx\right)\right]dy$$

$$= \int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy$$

Khi $\int_a^b g(x)dx$ là 1 hằng số. Do đó trong trường hợp này tích phân kép của hàm f có thể viết như là tích của hai tích phân đơn

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy \qquad \text{Trong đó } R = [a,b]\times[c,d]$$

Ví dụ 5 : Nếu $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thì theo phương trình 5 ta có

$$\iint_R \sin x coy dA = \int_0^{\pi/2} \sin x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\sin y]_0^{\pi/2} = 1.1 = 1$$