ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG VÀ VECTƠ GRADIENT

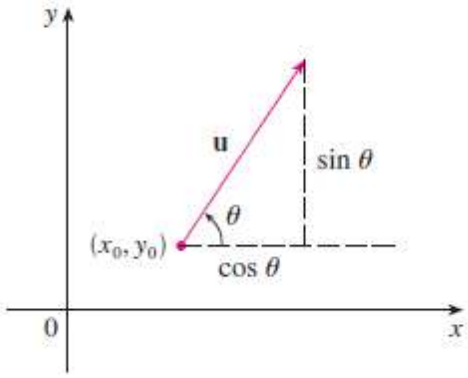
1. Đạo hàm theo hướng

Cho $z = f(x, y)$ khi đó ta có các đạo hàm riêng f_x và f_y được xác định bởi:

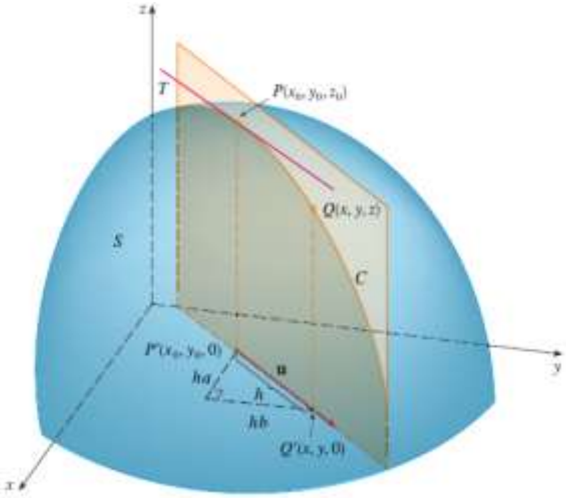
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Các đạo hàm riêng trên biểu thị tỉ lệ thay đổi của z theo phương x và theo phương y. Tức là theo hướng của các vectơ đơn vị i và j.

Tổng quát hơn, chúng ta muốn tính tỉ lệ thay đổi của z tại (x_0, y_0) theo hướng của vectơ đơn vị $u = < a, b >$ (xem hình vẽ dưới đây)



Để thực hiện được vấn đề trên, chúng ta xét mặt S có phương trình là $z = f(x, y)$ và đặt $z_0 = f(x_0, y_0)$. Khi đó điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ nằm trên S (xem hình vẽ)



Một mặt phẳng thẳng đứng đi qua P cùng phương với $u =< a,b >$ sẽ cắt S và tạo ra đường cong C nằm trên S. Khi ấy độ dốc của đường thẳng T tiếp xúc với C tại điểm P chính là tỉ lệ thay đổi của z theo hướng của u.

Cho $Q(x, y, z)$ là một điểm khác P và nằm trên C, gọi P' và Q' là hình chiếu của P và Q lên mặt phẳng xy. Khi đó ta có vectơ $\overrightarrow{P'Q'}$ song song với u và do đó ta có được: $\overrightarrow{P'Q'} = h.u = h < a,b >=< h.a, h.b >,\ h \in R$.

Khi đó: $x - x_0 = ha$ và $y - y_0 = hb$ nên suy ra

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Nếu chúng ta lấy giới hạn khi $h \to 0$, thì chúng ta sẽ nhận được tỉ lệ thay đổi của z theo hướng của u, giới hạn này được goi là đạo hàm theo hướng của f theo hướng của u.

**** Định nghĩa***: Đạo hàm theo hướng của f tại (x_0, y_0) theo hướng của vectơ đơn vị $u =< a,b >$ là:

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

khi giới hạn này tồn tại.

Định lý: Nếu f là một hàm khả vi theo x và y thì f có đạo hàm theo hướng của vectơ đơn vị $u=<a,b>$ và ta có được:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Nhận xét: Nếu vectơ đơn vị u hợp với phần dương trục x một góc θ thì khi ấy ta có : $u=<\cos\theta, \sin\theta>$. Do đó công thức trên sẽ được viết lại như sau:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_y(x, y) \sin\theta$$

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm theo hướng $D_u f(x,y)$ của $f(x,y)=x^3-3xy+4y^2$ theo hướng của vectơ đơn vị hợp với phần dương trục x một góc $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

2. Vectơ Gradient

Công thức trong định lý ở trên có thể được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)a + f_y(x,y)b \\ &= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle a,b\rangle \\ &= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Vectơ $<f_x(x,y), f_y(x,y)>$ không đơn thuần là việc tính toán các đạo hàm theo hướng , nó xuất hiện trong nhiều ngữ cảnh khác rất hay . Vì thế nó được đặt một cái tên rất đặc biệt "***Gradient của*** f" và được ký hiệu là $Grad\ f$ hoặc ∇f .

Định nghĩa: Cho f là một hàm hai biến . Khi đó Gradient của f là một hàm vectơ ∇f được xác định bởi:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Như thế chúng ta có được:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Biểu thức sau cùng nói lên rằng đạo hàm theo hướng vectơ u chính là phép chiếu vô hướng của vectơ Gradient lên u.

3. Mở rộng đối với hàm 3 biến

* Đạo hàm theo hướng của hàm f tại (x_0, y_0, z_0) theo hướng của vectơ đơn vị $u = < a, b, c >$ là:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

khi giới hạn trên tồn tại.

Bằng cách tính toán tương tự như hàm hai biến, chúng ta có:

$$D_u f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Tương tự ta có được vectơ Gradient là:

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

4. Đạo hàm theo hướng cực đại

Giả sử chúng ta có f là một hàm hai biến hoặc ba biến và chúng ta xét tất cả các đạo hàm theo hướng (nếu có) của f tại một điểm đã cho. Chúng cho ta biết tỉ lệ thay đổi của f theo các hướng được xét. Vậy chúng ta đặt tiếp một câu hỏi: "Theo hướng nào thì f sẽ thay đổi nhanh nhất ?, giá trị cực đại của lượng thay đổi này là bao nhiêu ?".

**** Định lý***:

Giả sử f là một hàm khả vi (hai biến hoặc ba biến). Khi ấy giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $D_u f(X)$ là $|\nabla f(X)|$ và nhận được khi u cùng hướng với vectơ gradient $\nabla f(X)$.