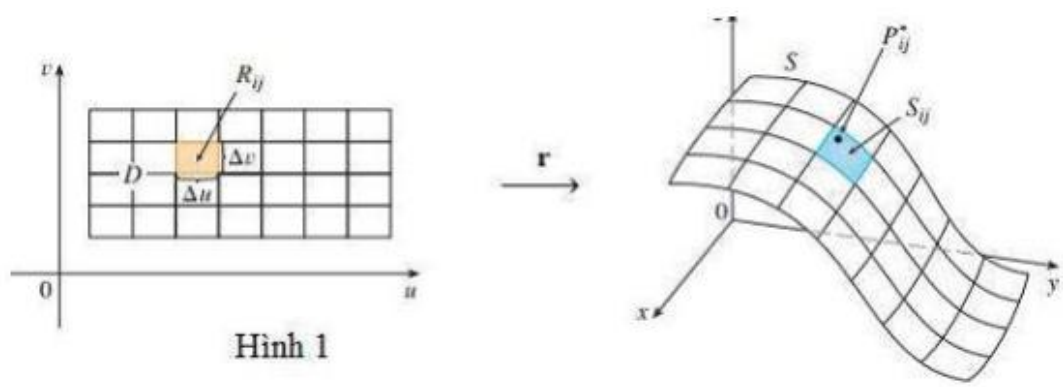
Trường hợp Mặt tham số

Giả sử mặt S cho bởi hàm vectơ xác định trên một miền tham số D thuộc mặt phẳng uv:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

Để đơn giản trong định nghĩa, chúng ta xét D là một miền hình chữ nhật.

+. Chúng ta chia miền D thành các hình chữ nhật con R_{ij} với các cạnh là Δu và Δv. Khi ấy mặt S sẽ được chia thành các mảnh nhỏ S_{ij} tương ứng, với diện tích mỗi mảnh là ΔS_{ij} (xem hình vẽ minh họa dưới đây)



Hình 1

+. Chúng ta tính giá trị của f tại điểm P_{ij}^* và lập tổng:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

+. Chúng ta lấy giới hạn khi số các mảnh chia S_{ij} càng lớn thì giới hạn đó (nếu tồn tại) được gọi là tích phân mặt của f trên mặt S. Cụ thể ta có:

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

Mặt khác chúng ta có được biểu thức xấp xỉ sau:

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \, \Delta v$$

Trong đó:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Do đó tích phân mặt được tính bởi công thức sau:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Trong trường hợp đặc biệt $f(x, y, z) = 1$ thì ta có:

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

Ví dụ 1: Tính tích phân mặt $\iint_S x^2 dS$ trong đó S là mặt cầu đơn vị có phương trình cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

* Một ứng dụng của tích phân mặt là nếu ta xét một bản mỏng có dạng như mặt S và có được mật độ tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$. Khi đó ta có khối lượng của S:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

Và tọa độ của trọng tâm được xác định bởi:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)\, dS$$

<u>Trường hợp mặt là đồ thị của hàm 2 biến</u>

Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x, y)$ khi ấy ta xem x và y như là các tham số thì ta có các phương trình tham số của mặt S là:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Do đó:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Suy ra:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Do vậy:

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Suy ra: $$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA.$$

* Công thức hoàn toàn tương tự khi mặt S có phương trình $y = h(x,z)$, trong trường hợp này D nằm trong mặt phẳng xz và chính là hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng này:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

Ví dụ 2: Tính tích phân mặt $\iint_S ydS$ trong đó S là mặt có phương trình cho bởi $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 2$.