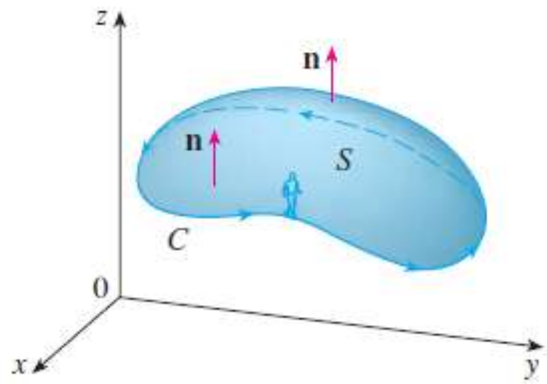
Định lý Stokes



Định lý Stokes có thể được xem như là định lý Green trong không gian có số chiều cao hơn. Nếu như định lý Green nói lên mối quan hệ giữa tích phân hai lớp trên một miền phẳng D với tích phân đường theo đường cong phẳng là biên của D, thì định lý Stokes nói lên mối quan hệ giữa tích phân mặt trên một mặt S với tích phân đường theo đường cong là biên của mặt S (đường cong trong không gian).

Hình vẽ trên cho biết mặt được định hướng với vectơ pháp đơn vị n. Hướng của S bao gồm hướng dương của đường cong biên C. Điều này có nghĩa là nếu bạn đi trên chiều dương quanh C mà đầu của bạn đặt theo hướng của n thì mặt S luôn nằm bên trái của bạn.

**** Định lý Stokes:***

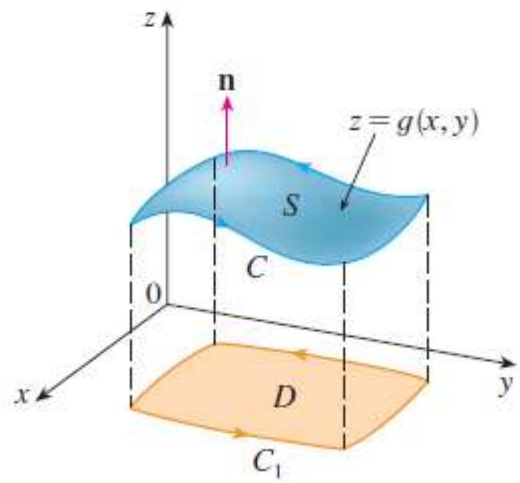
Cho S là một mặt trơn từng mảnh được định hướng sao cho nó bị bao bởi một đường cong C trơn từng mảnh, đơn đóng với chiều dương được định hướng. Cho F là một trường vectơ mà các thành phần của nó có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở trong R^3 chứa S. Khi đó ta có:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

***Chứng minh định lý Stokes*:**

Việc chứng minh định lý Stokes trong trường hợp tổng quát rất phức tạp, chúng ta liệt kê chứng minh dưới đây chỉ xét trong một trường hợp đặc biệt.

Giả sử phương trình của S cho bởi: $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, trong đó g là một hàm có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục, còn D là một miền phẳng đơn và có biên là đường cong phẳng C_1 tương ứng với biên C của S (xem hình vẽ dưới đây)



Nếu S là mặt được định theo hướng lên trên thì hướng dương của C sẽ trùng với hướng dương của C_1.

Giả sử trường vectơ xác định bởi: $F = P\mathrm{i} + Q\mathrm{j} + R\mathrm{k}$ trong đó các hàm P, Q và R có các đạo hàm riêng liên tục.

Vì S là đồ thị của một hàm nên ta có:

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

Mặt khác nếu đường cong C_1 xác định bởi công thức:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Thì đường cong C sẽ được xác định bởi công thức:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)dt \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right]dt \\
&= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right]dt \\
&= \int_{C_1} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]dA
\end{aligned}$$

Suy ra ta có:

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)\right]dA
\end{aligned}$$

Vậy ta có được đẳng thức của định lý Stokes:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S curl\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

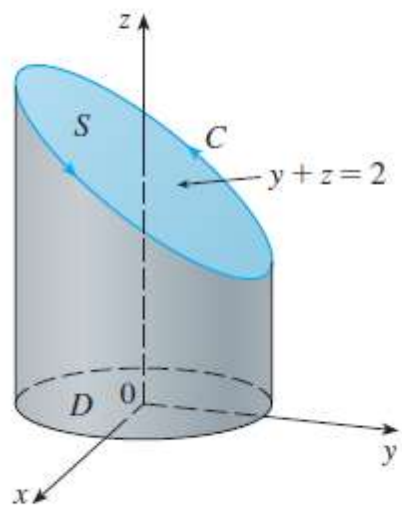
**** Hệ quả:***

Với các giả thiết của định lý Stokes ta có:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int_C F.d\mathrm{r}$, trong đó $F(x,y,z) = (-y^2)\mathrm{i} + (x)\mathrm{j} + (z^2)\mathrm{k}$ và C là giao tuyến của mặt phẳng $y+z=2$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$, chiều dương của C được chọn là chiều ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía trên.

Giải: (xem hình vẽ minh họa dưới đây)



Ta có được:

$$curl\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\mathbf{k}$$

Suy ra ta có:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S curl\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1+2y)\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3}\sin\theta]_0^1\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\iint_S \text{curl}\, F.d\text{S}$ trong đó

$F(x,y,z) = (xz)\text{i} + (yz)\text{j} + (xy)\text{k}$ và S là một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sao cho nằm phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và nằm phía trên mặt phẳng xy.

Giải: (xem hình vẽ minh họa dưới đây)

Trước hết chúng ta tìm biên C của S, ta có được phương trình của C là:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = \sqrt{3}$$

Do đó phương trình vectơ của C là:

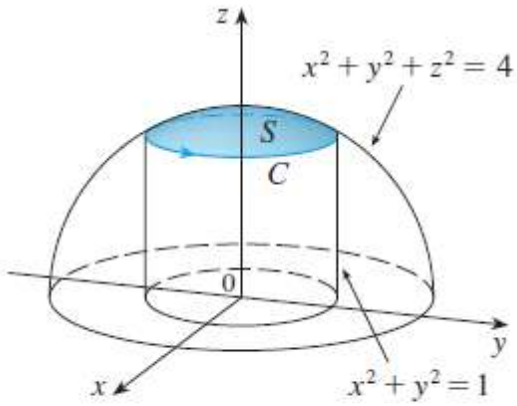
$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \quad \mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Từ đó ta suy ra:

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Và

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin t\,\mathbf{j} + \cos t\sin t\,\mathbf{k}$$



Áp dụng định lý Stokes ta có:

$$\iint_S curl\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\cos t\sin t + \sqrt{3}\sin t\cos t)\,dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

BÀI TẬP

Dùng định lý Stokes tính tích phân $\int_C F.d\mathrm{r}$, với mỗi trường hợp C được định hướng theo chiều ngược kim đồng đồ khi nhìn từ phía trên.

(a). $F(x,y,z) = (x+y^2)\mathrm{i} + (y+z^2)\mathrm{j} + (z+x^2)\mathrm{k}$ và C là biên của tam giác có các đỉnh $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ và $(0,0,1)$.

(b). $F(x,y,z) = e^{-x}\mathrm{i} + e^{x}\mathrm{j} + e^{z}\mathrm{k}$ và C là biên của phần mặt phẳng $2x+y+2z=2$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

(c). $F(x,y,z) = yz\mathrm{i} + 2xz\mathrm{j} + e^{xy}\mathrm{k}$ và C là đường tròn $x^2+y^2=16,\ z=5$.

(d). $F(x,y,z) = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + (x^2+y^2)\mathrm{k}$ và C là biên của phần mặt paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.