Tích phân đường trong không gian

Giả sử C là đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b.$$

Cho f là một hàm ba biến liên tục trên miền xác định chứa đường cong C, khi đó chúng ta cũng định nghĩa được tích phân đường của f dọc theo C tương tự như trường hợp C là đường cong phẳng, cụ thể:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

Và chúng ta cũng có được công thức tính trong trường hợp này là:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

* Nhận xét:

(i). Vế phải của cả hai công thức tính tích phân đường (trong mặt phẳng và trong không gian) chúng ta có thể kết hợp thành một công thức theo hàm vectơ như sau:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt$$

Với trường hợp $f = 1$ chúng ta nhận được:

$$\int_C ds = \int_a^b |\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt = L$$

Trong đó L là độ dài của đường cong C.

(ii). Ta có thể xác định được:

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

Như thế chúng ta có thể viết lại biểu thức tích phân đường như sau:

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

Ví dụ: Tính $\int_C y \sin z\, ds$ với C là đường xoắn ốc được cho bởi

$x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$

Giải.

$$\int_C y \sin z\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi$$