Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu

1.1. Định nghĩa: Một hàm hai biến có giá trị cực đại địa phương tại (a,b) nếu như $f(x,y)\le f(a,b)$ khi (x,y) ở gần (a,b). Nghĩa là, $f(x,y)\le f(a,b)$ với mọi điểm (x,y) nằm trong một đĩa tròn nào đó có tâm là (a,b). Giá trị $f(a,b)$ được gọi là giá trị cực đại địa phương.

Tương tự, nếu $f(x,y)\ge f(a,b)$ khi (x,y) ở gần (a,b) thì $f(a,b)$ được gọi là giá trị cực tiểu địa phương.

Nếu các bất đẳng thức trong định nghĩa trên thỏa mãn với mọi điểm (x,y) thuộc miền xác định của f thì khi ấy f có giá trị cực đại tuyệt đối (giá trị lớn nhất) và giá trị cực tiểu tuyệt đối (giá trị nhỏ nhất).

1.2. Định lý:

Nếu f có cực đại và cực tiểu địa phương tại (a,b) và các đạo hàm riêng cấp một của f tồn tại thì ta có:

$$\begin{cases} f_x'(a,b)=0 \\ f_y'(a,b)=0 \end{cases}$$

Một điểm (a,b) được gọi là điểm tới hạn nếu như hoặc nó thỏa mãn hệ trên hoặc tại đó các đạo hàm riêng không tồn tại.

1.3. Kiểm tra bằng Đạo Hàm Riêng cấp 2:

Giả sử các đạo hàm riêng cấp hai của f liên tục trên một đĩa tròn tâm (a,b) và ta có: $\begin{cases} f_x'(a,b)=0 \\ f_y'(a,b)=0 \end{cases}$. Đặt: $D=D(a,b)=f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$. Khi ấy ta có các trường hợp sau:

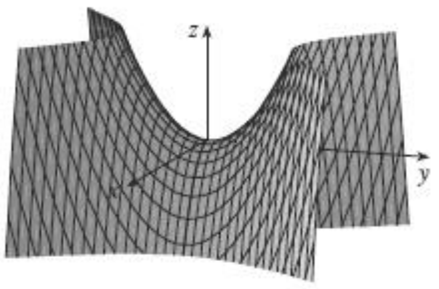
(i). Nếu $D>0$ và $f_{xx}(a,b)>0$ thì $f(a,b)$ là giá trị cực tiểu địa phương.

(ii). Nếu $D>0$ và $f_{xx}(a,b)<0$ thì $f(a,b)$ là giá trị cực đại địa phương.

(iii). Nếu $D<0$ thì $f(a,b)$ không là giá trị cực đại địa phương mà cũng không là giá trị cực tiểu địa phương.

**** Chú ý***:

(i). Điểm (a,b) trong trường hợp (iii) ở trên được gọi là điểm yên ngựa của f.



(ii). Khi $D=0$ thì tiêu chuẩn trên không cho chúng ta biết gì về $f(a,b)$, nó có thể là giá trị cực đại địa phương, mà cũng có thể là giá trị cực tiểu địa phương, cũng có thể không là gì cả.

(iii). Chúng ta có thể viết lại biểu thức của D bằng định thức:

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=f_{xx}.f_{yy}-[f_{xy}]^2$$

Ví dụ 1: Tìm giá trị cực đại và cực tiểu địa phương, điểm yên ngựa của hàm:

$$f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các điểm tới hạn của: $f(x,y)=10x^2y-5x^2-4y^2-x^4-2y^4$.

1.4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Tương tự như hàm một biến, chúng ta có định lý giá trị cực trị của một hai biến:

Định lý: Nếu f là một hàm hai biến trên một miền D đóng và bị chặn trong R^2 thì f có một giá trị lớn nhất và một giá trị nhỏ nhất trên D.

Dựa theo định lý trên chúng ta có được phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm hai biến f trên một miền đóng và bị chặn D như sau:

+. Bước 1: Tìm giá trị của f tại các điểm tới hạn nằm trong D.

+. Bước 2: Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của D.

+. Bước 3: Số lớn nhất trong tất cả các giá trị ở Bước 1 và Bước 2 chính là giá trị lớn nhất và số nhỏ nhất trong tất cả các giá trị đó chính là giá trị lớn nhất.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y)=x^2-2xy+2$ trên miền hình chữ nhật $D=\{(x,y)/0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$.

1.5. Nhân tử Lagrange

Trong phần này chúng ta đưa ra phương pháp Lagrange cho việc xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm $f(x,y,z)$ thỏa mãn điều kiện biên có dạng $g(x,y,z)=k$.

Bằng phép phân tích đại số, nếu $f(x,y,z)$ đạt giá trị cực trị tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$ thì ta sẽ có: $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$.

Số λ trong biểu thức trên được gọi là nhân tử Lagrange.

* ***Phương pháp nhân tử Lagrange***:

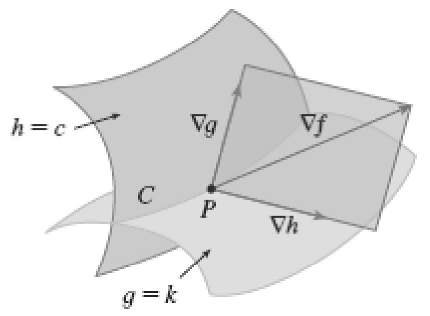
Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y,z)$ thỏa mãn điều kiện biên $g(x,y,z)=k$ chúng ta thực hiện theo các bước sau:

+. Bước 1: Tìm tất cả các giá trị của x, y, z, và λ sao cho:

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \text{ và } g(x,y,z)=k$$

+. Bước 2: Tính giá trị của f tại điểm (x,y,z) có kết quả ở Bước 1. Khi ấy số lớn nhất chính là giá trị lớn nhất của f và số nhỏ nhất chính là giá trị nhỏ nhất của f.

* Trường hợp có 2 điều kiện biên:



Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y,z)$ thỏa mãn 2 điều kiện biên $g(x,y,z)=k$ và $h(x,y,z)=c$ chúng ta thực hiện theo các bước sau:

+. Bước 1: Tìm tất cả các giá trị của x, y, z, λ, và μ sao cho:

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z), \quad g(x,y,z)=k, \quad h(x,y,z)=c$$

+. Bước 2: Tính giá trị của f tại điểm (x,y,z) có kết quả ở Bước 1. Khi ấy số lớn nhất chính là giá trị lớn nhất của f và số nhỏ nhất chính là giá trị nhỏ nhất của f.

* ***Nhận xét***:

(i). Chúng ta có thể sử dụng phương pháp Lagrange cho một hàm hai biến.

(ii). Trong trường hợp thõa mãn một điều kiện biên, chúng ta có thể viết lại các phương trình của Bước 1 như sau:

$$f_x=\lambda g_x, \quad f_y=\lambda g_y, \quad f_z=\lambda g_z, \quad g(x,y,z)=k$$

(iii). Tương tự như nhận xét (ii) cho trường hợp thõa mãn hai điều kiện biên, chúng ta phải giải một hệ phương trình gồm 5 phương trình và 5 ẩn số.

Ví dụ 1: Một hình hộp chữ nhật không có nắp được làm từ 12 m^2 giấy Bìa Cứng. Hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích của hình hộp.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị cực trị của hàm $f(x,y)=x^2+2y^2$ tại những điểm nằm trên đường tròn $x^2+y^2=1$.

Ví dụ 3: Tìm các giá trị cực trị của hàm $f(x,y)=x^2+2y^2$ tại những điểm nằm trên đĩa tròn $x^2+y^2\le 1$.

Ví dụ 4: Cho một mặt phẳng $(C): x-y+z=1$, một mặt trụ $(H): x^2+y^2=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y,z)=x+2y+3z$ tại những điểm nằm trên giao tuyến của (C) và (H).