Chương 2

DÃY VÔ HẠN VÀ CHUỖI

Chương 2

DÃY VÔ HẠN VÀ CHUỖI

Mục tiêu

Chương 2

DÃY VÔ HẠN VÀ CHUỖI

Mục tiêu

- Khối kiến thức về dãy số: Khái niệm dãy số, sự hội tụ của dãy số; Các tính chất của dãy số; Định lý đơn điệu bị chặn và ứng dụng.

Chương 2

DÃY VÔ HẠN VÀ CHUỖI

Mục tiêu

- Khối kiến thức về dãy số: Khái niệm dãy số, sự hội tụ của dãy số; Các tính chất của dãy số; Định lý đơn điệu bị chặn và ứng dụng.
- Khối kiến thức về chuỗi số: Khái niệm chuỗi số, khái niệm chuỗi hội tụ, khái niệm chuỗi phân kỳ; Chuỗi số dương và các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương; Chuỗi đan dấu, tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu, xấp xỉ tổng theo tiêu chuẩn đan dấu; Chuỗi hội tụ tuyệt đối và tiêu chuẩn tỷ số.

Chương 2
DÃY VÔ HẠN VÀ CHUỖI

Mục tiêu

- Khối kiến thức về dãy số: Khái niệm dãy số, sự hội tụ của dãy số; Các tính chất của dãy số; Định lý đơn điệu bị chặn và ứng dụng.
- Khối kiến thức về chuỗi số: Khái niệm chuỗi số, khái niệm chuỗi hội tụ, khái niệm chuỗi phân kỳ; Chuỗi số dương và các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương; Chuỗi đan dấu, tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu, xấp xỉ tổng theo tiêu chuẩn đan dấu; Chuỗi hội tụ tuyệt đối và tiêu chuẩn tỷ số.
- Khối kiến thức về chuỗi lũy thừa: Khái niệm chuỗi lũy thừa; Bán kính và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa; Biểu diễn hàm bằng tổng của chuỗi lũy thừa.

1 Dãy số.

1 Dãy số.

1.1 Khái niệm dãy số.

1 Dãy số.

1.1 Khái niệm dãy số.

Định nghĩa: Một dãy số là ảnh của một hàm
$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ a(n) := a_n$, nó có thể viết dưới dạng

$$a_{1,}a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

1 Dãy số.

1.1 Khái niệm dãy số.

Định nghĩa: Một dãy số là ảnh của một hàm $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ a(n) := a_n$, nó có thể viết dưới dạng

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

Số a_1 được gọi là phần tử thứ nhất, a_2 là phần tử thứ hai, và trong trường hợp tổng quát a_n là phần tử thứ n.

1 Dãy số.

1.1 Khái niệm dãy số.

Định nghĩa: Một dãy số là ảnh của một hàm $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ a(n) := a_n$, nó có thể viết dưới dạng

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

Số a_1 được gọi là phần tử thứ nhất, a_2 là phần tử thứ hai, và trong trường hợp tổng quát a_n là phần tử thứ n.

Ký hiệu:

1 Dãy số.

1.1 Khái niệm dãy số.

Định nghĩa: Một dãy số là ảnh của một hàm $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ a(n) := a_n$, nó có thể viết dưới dạng

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

Số a_1 được gọi là phần tử thứ nhất, a_2 là phần tử thứ hai, và trong trường hợp tổng quát a_n là phần tử thứ n.

Ký hiệu:

Liệt kê $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$

1 Dãy số.

1.1 Khái niệm dãy số.

Định nghĩa: Một dãy số là ảnh của một hàm
$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ a(n) := a_n$, nó có thể viết dưới dạng

$$a_{1,}a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

Số a_1 được gọi là phần tử thứ nhất, a_2 là phần tử thứ hai, và trong trường hợp tổng quát a_n là phần tử thứ n.

Ký hiệu:

Liệt kê $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$

Số hạng tổng quát $\{a_n\}$ hoặc $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ví dụ: Cho một dãy số biểu diễn dưới ba dạng khác nhau:

$(a)\ \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty};\ a_n = \frac{n}{n+1};\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

$(b)\ \{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty};\ a_n = \sqrt{n-3}, n \geq 3;$

$\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

$(c)\ \left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty};\ a_n = \cos\frac{n\pi}{6}, n \geq 0;$

$\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\frac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

Ví dụ: Dãy không có công thức đơn giản xác định số hạng tổng quát.

1. Dãy $\{p_n\}$, với p_n là dân số thế giới vào tháng một năm thứ n.
2. Nếu chúng ta đặt a_n là số hạng thập phân thứ n của số e, khi đó $\{a_n\}$ là một dãy mà một số phần tử đầu tiên của nó là
$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5...\}$$
3. Dãy Fibonacci $\{f_n\}$ được xác định bằng công thức truy hồi
$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$$
Mỗi phần tử là tổng của hai phần tử trước đó. Một vài phần tử đầu của dãy là
$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$$

1.2 Khái niệm hội tụ - Phân kỳ của dãy số.

1.2 Khái niệm hội tụ - Phân kỳ của dãy số.

Định nghĩa: Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn L và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{hoặc} \qquad a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

nếu chúng ta có thể chọn a_n gần L một cách tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.

1.2 Khái niệm hội tụ - Phân kỳ của dãy số.

Định nghĩa: Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn L và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{hoặc} \qquad a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

nếu chúng ta có thể chọn a_n gần L một cách tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n$ tồn tại, chúng ta nói rằng dãy hội tụ. Ngược lại chúng ta nói dãy phân kỳ (hoặc là phân kỳ).

1.2 Khái niệm hội tụ - Phân kỳ của dãy số.

Định nghĩa: Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn L và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{hoặc} \qquad a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

nếu chúng ta có thể chọn a_n gần L một cách tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.

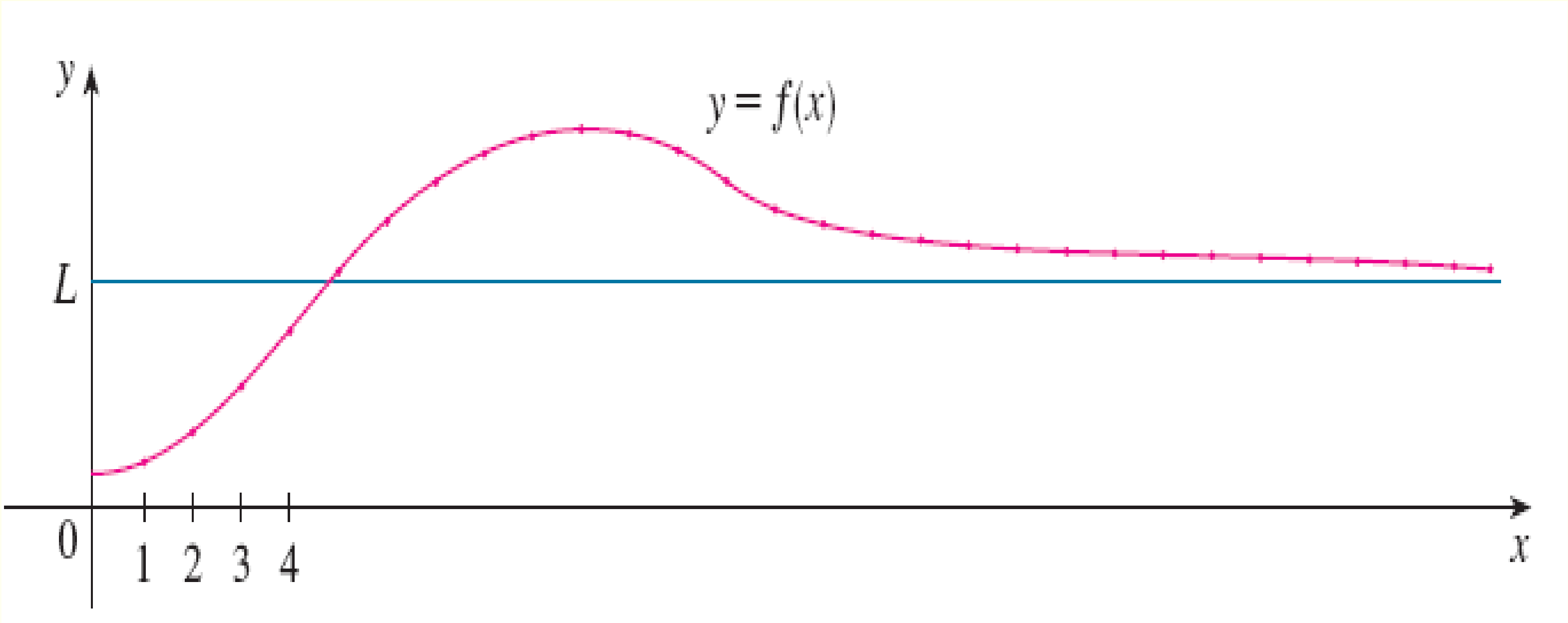
Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n$ tồn tại, chúng ta nói rằng dãy hội tụ. Ngược lại chúng ta nói dãy phân kỳ (hoặc là phân kỳ).

Định lý: Nếu

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ và } f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

thì

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$


y
y = f(x)
L
0
1 2 3 4
x

Ví dụ:

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0,\ r>0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}=0,\ r>0;$$

$$(b)\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e;$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1.$$

Ví dụ:

$$(a) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0,\ r > 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0,\ r > 0;$$

$$(b) \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

$$(c) \quad \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = 1 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1.$$

Nếu $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$là các dãy hội tụ và c là một hằng số thì

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n; \ \lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c; \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{nếu} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} [a_n^p] = [\lim_{n\to\infty} a_n]^p \quad \text{nếu} \quad p > 0 \quad \text{và} \quad a_n > 0$$

Định lý: Ta cũng có Định lý kẹp đối với dãy. Nếu $a_n \leq b_n \leq c_n$; với mọi $n \geq n_0$ và

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

thì $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Hệ quả: Nếu $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Định lý: Ta cũng có Định lý kẹp đối với dãy. Nếu $a_n \leq b_n \leq c_n$; với mọi $n \geq n_0$ và

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

thì $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Hệ quả: Nếu $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ví dụ: Tính giá trị $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nếu nó tồn tại.

Giải:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Vậy nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

1.3 Dãy con và các dãy đặc biệt.

1.3 Dãy con và các dãy đặc biệt.

Định nghĩa: Dãy $\{b_k\}$ được gọi là một dãy con của $\{a_n\}$ nếu với mọi k tồn tại n sao cho $b_k = a_n$ và nếu $b_{k+1} = a_m$ thì $m > n$.

1.3 Dãy con và các dãy đặc biệt.

Định nghĩa: Dãy $\{b_k\}$ được gọi là một dãy con của $\{a_n\}$ nếu với mọi k tồn tại n sao cho $b_k = a_n$ và nếu $b_{k+1} = a_m$ thì $m > n$.

Định lý: Nếu $\{a_n\}$ là dãy hội tụ thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ và giới hạn của dãy con bằng giới hạn của dãy $\{a_n\}$.

1.3 Dãy con và các dãy đặc biệt.

Định nghĩa: Dãy $\{b_k\}$ được gọi là một dãy con của $\{a_n\}$ nếu với mọi k tồn tại n sao cho $b_k = a_n$ và nếu $b_{k+1} = a_m$ thì $m > n$.

Định lý: Nếu $\{a_n\}$ là dãy hội tụ thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ và giới hạn của dãy con bằng giới hạn của dãy $\{a_n\}$.

Hệ quả: Nếu tồn tại hai dãy con của dãy $\{a_n\}$ hội tụ về hai giá trị khác nhau thì dãy $\{a_n\}$ phân kỳ.

Ví dụ: Xác định dãy $a_n = (-1)^n$ hội tụ hay phân kỳ.

Giải: Xét hai dãy con của dãy đã cho tương ứng với dãy các chỉ số chẵn và dãy các chỉ số lẻ,

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1,\ a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$$

nên dãy đã cho phân kỳ.

Ví dụ: Dãy $\{r^n\}$ hội tụ nếu $-1 < r \leq 1$ và phân kỳ với mọi giá trị r khác.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 \text{ nếu } -1 < r < 1 \\ 1 \text{ nếu } r = 1 \end{cases}$$

Định nghĩa: Dãy số $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ được gọi là

(1) Dãy tăng nếu $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...$;

(2) Dãy giảm nếu $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq ...$;

Các dãy tăng hay dãy giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

Ví dụ: Dãy $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$ là giảm vì

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

Và như vậy $a_n > a_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.

Định nghĩa:

Định nghĩa:

Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $a_n \leq M, \ \forall n \geq 1.$

Định nghĩa:

Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $a_n \leq M,\ \forall n \geq 1.$

Nó được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sau cho $a_n \geq m,\ \forall n \geq 1.$

Định nghĩa:

Một dãy $\{a_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $a_n \le M,\ \forall n \ge 1.$

Nó được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sau cho $a_n \ge m,\ \forall n \ge 1.$

Nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới thì nó được gọi là một dãy bị chặn.

Ví dụ:

(a) $a_n = n$ là dãy bị chặn dưới bởi 1, và không bị chặn trên.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ là dãy bị chặn, chặn dưới bởi 0 và chặn trên bởi 1.

(c) $a_n = (-1)^n n$ là dãy không bị chặn trên cũng không bị chặn dưới.

1.4 Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.

1.4 Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.

Định lý: (Nguyên lý đơn điệu, bị chặn)

1.4 Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.

Định lý: (Nguyên lý đơn điệu, bị chặn)

(1) Dãy tăng, bị chặn trên thì hội tụ.

1.4 Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.

Định lý: (Nguyên lý đơn điệu, bị chặn)

(1) Dãy tăng, bị chặn trên thì hội tụ.

(2) Dãy giảm, bị chặn dưới thì hội tụ.

1.4 Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.

Định lý: (Nguyên lý đơn điệu, bị chặn)

(1) Dãy tăng, bị chặn trên thì hội tụ.

(2) Dãy giảm, bị chặn dưới thì hội tụ.

(3) Một dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ

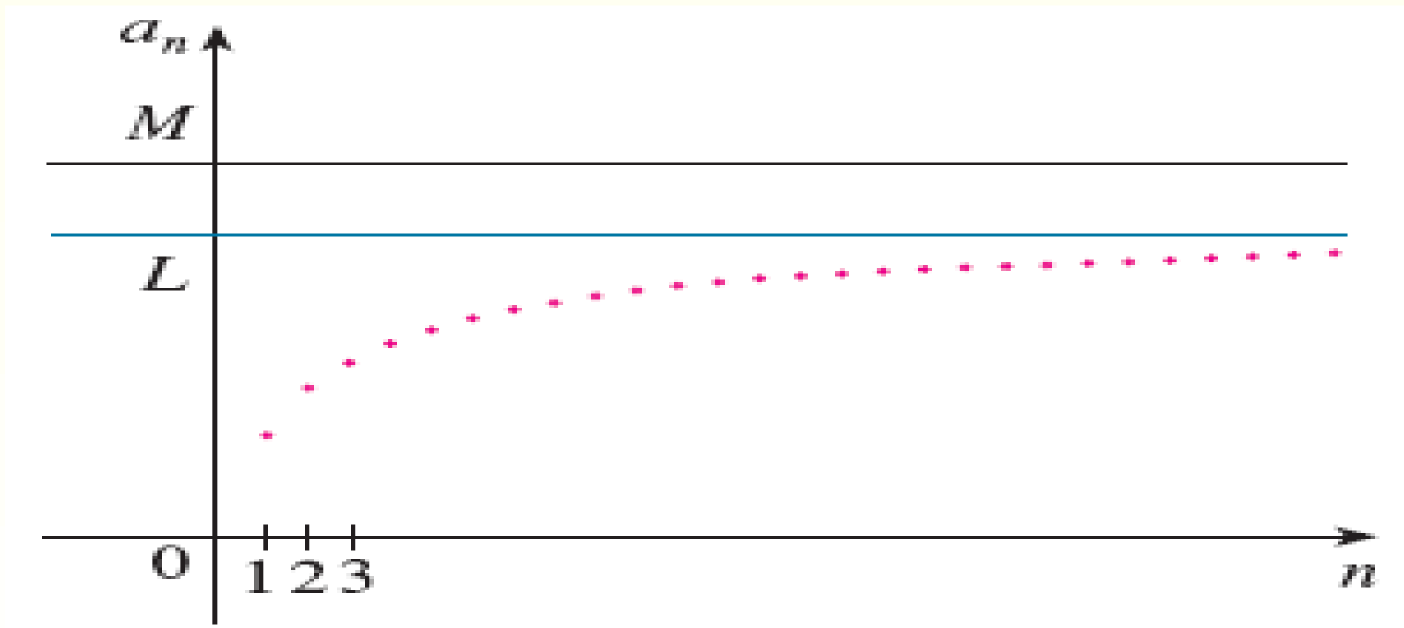
1.4 Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.

Định lý: (Nguyên lý đơn điệu, bị chặn)

(1) Dãy tăng, bị chặn trên thì hội tụ.

(2) Dãy giảm, bị chặn dưới thì hội tụ.

(3) Một dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ



2 Chuỗi số.

2.1 Khái niệm chuỗi số - Chuỗi hội tụ, chuỗi phân kỳ.

Định nghĩa: Nếu chúng ta cộng tất cả các phần tử của dãy $\{a_n\}$ chúng ta nhận được một biểu diễn dưới dạng

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{2.1}$$

Tổng vô hạn các phần tử này được gọi là chuỗi vô hạn (hoặc đơn giản là chuỗi) và được ký hiệu một cách ngắn gọn bởi ký hiệu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{hoặc} \qquad \sum a_n$$

(1) a_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

(1) a_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

(2) Lấy tổng hữu hạn các phần tử của dãy

$$s_1 = a_1; \; s_2 = a_1 + a_2, \; \ldots \; .$$

Và trong trường hợp tổng quát

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Thì $\{s_n\}$ được gọi là dãy các tổng riêng của chuỗi.

(1) a_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

(2) Lấy tổng hữu hạn các phần tử của dãy

$$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2,\ \dots\ .$$

Và trong trường hợp tổng quát

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Thì $\{s_n\}$ được gọi là dãy các tổng riêng của chuỗi.

(3) Chuỗi đã cho được gọi là hội tụ nếu dãy tổng riêng $\{s_n\}$ hội tụ, và nếu $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ thì ta nói chuỗi đã cho có tổng bằng S và viết $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

(1) a_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

(2) Lấy tổng hữu hạn các phần tử của dãy

$$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2,\ \ldots\ .$$

Và trong trường hợp tổng quát

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Thì $\{s_n\}$ được gọi là dãy các tổng riêng của chuỗi.

(3) Chuỗi đã cho được gọi là hội tụ nếu dãy tổng riêng $\{s_n\}$ hội tụ, và nếu $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ thì ta nói chuỗi đã cho có tổng bằng S và viết $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
Chuỗi không hội tụ được gọi là chuỗi phân kỳ.

Định lí 2.1. Chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ...$$

hội tụ nếu |r|$<$ 1 và tổng của nó là

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1.$$

Nếu $|r| \geq 1$, chuỗi cấp số nhân phân kỳ.

2.2 Tính chất của chuỗi số - Tiêu chuẩn phân kỳ.

2.2 Tính chất của chuỗi số - Tiêu chuẩn phân kỳ.

Định lí 2.2. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.2 Tính chất của chuỗi số - Tiêu chuẩn phân kỳ.

Định lí 2.2. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Hệ quả 2.1 (Tiêu chuẩn phân kỳ).

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại hoặc nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

2.2 Tính chất của chuỗi số - Tiêu chuẩn phân kỳ.

Định lí 2.2. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Hệ quả 2.1 (Tiêu chuẩn phân kỳ)*.*

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại hoặc nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Định lí 2.3. Nếu $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là các chuỗi hội tụ, thì các chuỗi $\sum ca_n$ (với c là một hằng số), $\sum (a_n + b_n)$ và $\sum (a_n - b_n)$ cũng hội tụ và

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$(iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

3 Chuỗi số dương.

3 Chuỗi số dương.

3.1 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn tích phân.

3 Chuỗi số dương.

3.1 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn tích phân.

Định nghĩa 3.1. Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ có các số hạng $u_n \geq 0$ với mọi n được gọi là chuỗi số dương.

3 Chuỗi số dương.

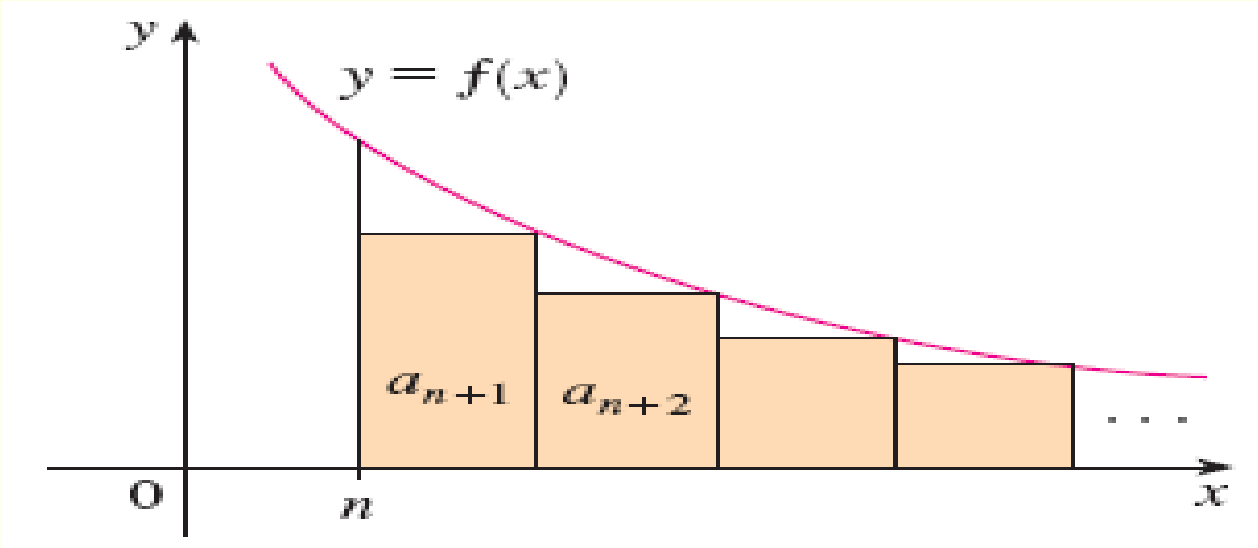
3.1 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn tích phân.

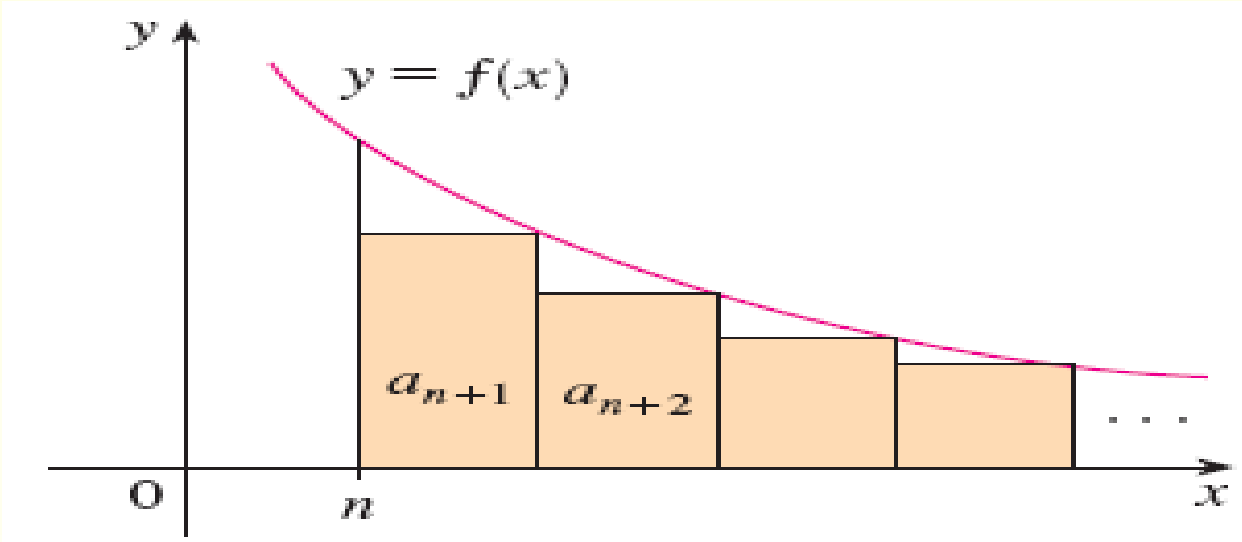
Định nghĩa 3.1. Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ có các số hạng $u_n \geq 0$ với mọi n được gọi là chuỗi số dương.

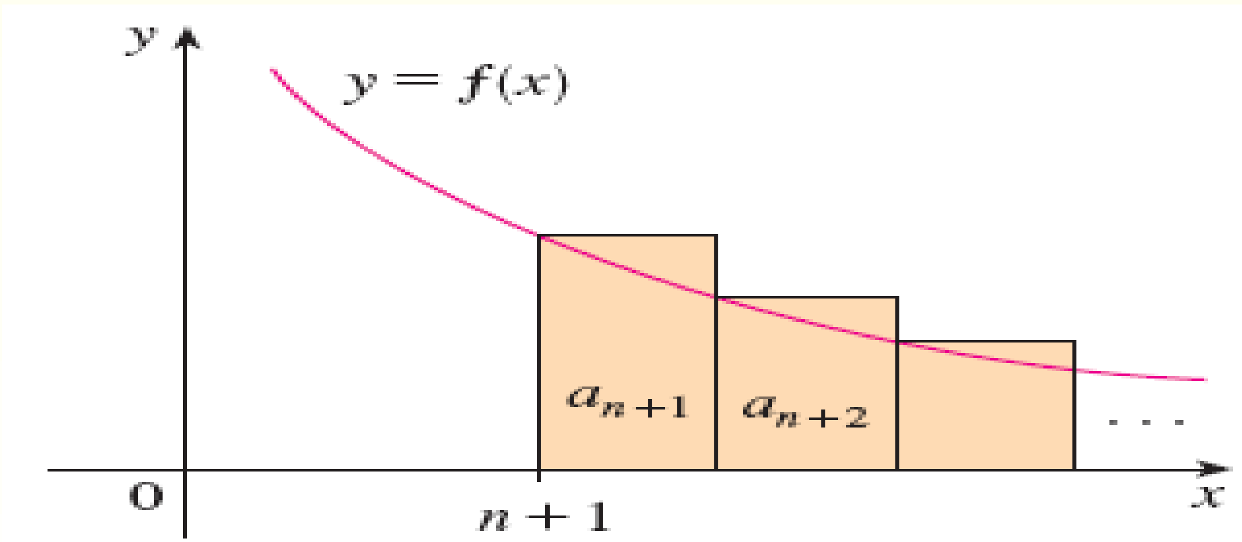
Định lí 3.1 (**Tiêu chuẩn tích phân.**). Giả sử f là một hàm liên tục, dương, giảm trên $[1, \infty)$ thỏa mãn $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ. Nói cách khác:

(a) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(b) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.


y
$y = f(x)$
a_{n+1}
a_{n+2}
...
O
n
x


y
y = f(x)
a_{n+1}
a_{n+2}
. . .
O
n
x


y
y = f(x)
a_{n+1}
a_{n+2}
. . .
O
n + 1
x

Định lí 3.2. **(Định lý p-chuỗi)** p-chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ nếu $p \leq 1$.

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

Định lí 3.3. **(Tiêu chuẩn so sánh)** Giả sử $\sum a_n, \sum b_n$ là các chuỗi số dương.

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

Định lí 3.3. **(Tiêu chuẩn so sánh)** Giả sử $\sum a_n, \sum b_n$ là các chuỗi số dương.

(a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $a_n \leq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng hội tụ.

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

Định lí 3.3. **(Tiêu chuẩn so sánh)** Giả sử $\sum a_n, \sum b_n$ là các chuỗi số dương.

(a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $a_n \le b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng hội tụ.

(b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $a_n \ge b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng phân kỳ.

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

Định lí 3.3. **(Tiêu chuẩn so sánh)** Giả sử $\sum a_n, \sum b_n$ là các chuỗi số dương.

(a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $a_n \leq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng hội tụ.

(b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $a_n \geq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng phân kỳ.

Hầu hết chúng ta sử dụng một trong hai kết quả sau:

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

Định lí 3.3. **(Tiêu chuẩn so sánh)** Giả sử $\sum a_n, \sum b_n$ là các chuỗi số dương.

(a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $a_n \leq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng hội tụ.

(b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $a_n \geq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng phân kỳ.

Hầu hết chúng ta sử dụng một trong hai kết quả sau:

(1) p-chuỗi: $\sum 1/n^p$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ nếu $p < 1$.

3.2 Chuỗi số dương và tiêu chuẩn so sánh.

Định lí 3.3. **(Tiêu chuẩn so sánh)** Giả sử $\sum a_n, \sum b_n$ là các chuỗi số dương.

(a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $a_n \leq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng hội tụ.

(b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $a_n \geq b_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum a_n$ cũng phân kỳ.

Hầu hết chúng ta sử dụng một trong hai kết quả sau:

(1) p-chuỗi: $\sum 1/n^p$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ nếu $p < 1$.

(2) Chuỗi cấp số nhân: $\sum ar^{n-1}$ hội tụ nếu $|r| < 1$ và phân kỳ với $|r| > 1$.

Hệ quả 3.1. **(Tiêu chuẩn tương đương)**

Gải sử $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là các chuỗi số dương. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

với c là một số hữu hạn và $c > 0$, thì cả hai chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

3.3 Tính gần đúng tổng của một chuỗi.

3.3 Tính gần đúng tổng của một chuỗi.

Tổng riêng s_n là một xấp xỉ đối với s vì $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

3.3 Tính gần đúng tổng của một chuỗi.

Tổng riêng s_n là một xấp xỉ đối với s vì $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Để tìm hiểu điều đó chúng ta cần ước lượng độ rộng của phần dư

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

3.3 Tính gần đúng tổng của một chuỗi.

Tổng riêng s_n là một xấp xỉ đối với s vì $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Để tìm hiểu điều đó chúng ta cần ước lượng độ rộng của phần dư

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

Phần dư R_n là sai số khi lấy tổng riêng thứ n, s_n, để sử dụng như là một xấp xỉ đối với tổng của chuỗi.

3.3 Tính gần đúng tổng của một chuỗi.

Tổng riêng s_n là một xấp xỉ đối với s vì $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Để tìm hiểu điều đó chúng ta cần ước lượng độ rộng của phần dư

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

Phần dư R_n là sai số khi lấy tổng riêng thứ n, s_n, để sử dụng như là một xấp xỉ đối với tổng của chuỗi.

Định lí 3.4. **(Ước lượng phần dư đối với tiêu chuẩn tích phân)**

Giả sử $f(k) = a_k$, với f là một hàm liên tục, dương và giảm với $x \geq 1$ và $\sum a_n$ hội tụ. Nếu $R_n = s - s_n$, thì

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

4 Một số tiêu chuẩn hội tụ khác.

4 Một số tiêu chuẩn hội tụ khác.

4.1 Chuỗi đan dấu.

4 Một số tiêu chuẩn hội tụ khác.

4.1 Chuỗi đan dấu.

Định nghĩa 4.1. Một chuỗi đan dấu (luân phiên) là chuỗi với số hạng tổng quát có dạng $a_n = (-1)^{n-1}b_n$ hoặc $a_n = (-1)^n b_n$ với b_n là một số dương. (Chính xác $b_n = |a_n|$).

Điều này có nghĩa, chuỗi đan dấu là chuỗi nhận một trong hai dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n,$$

với $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Định lí 4.1. **(Tiêu chuẩn chuỗi luân phiên)**

Nếu chuỗi luân phiên

$$\sum_{n}^{\infty}(-1)^n b_n, \qquad \sum_{n}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$$

thoả mãn đồng thời hai điều kiện

$$(i) b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \qquad (ii)] \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

thì nó hội tụ.

Định lí 4.1. **(Tiêu chuẩn chuỗi luân phiên)**

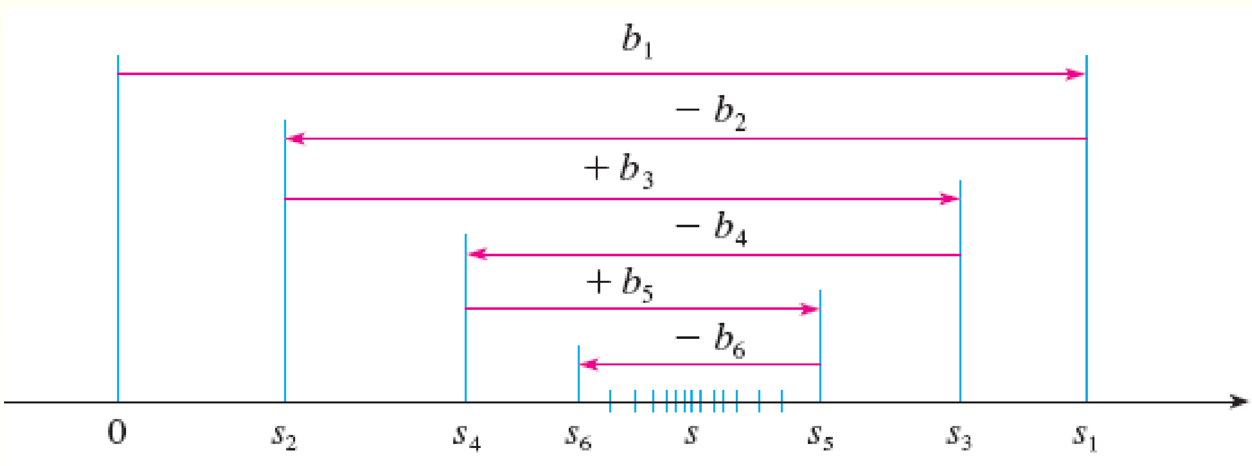
Nếu chuỗi luân phiên

$$\sum_{n}^{\infty}(-1)^n b_n, \qquad \sum_{n}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$$

thoả mãn đồng thời hai điều kiện

$$(i) b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \qquad (ii)] \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

thì nó hội tụ.



4.2 Tính gần đúng và ước lượng sai số của chuỗi luân phiên.

4.2 Tính gần đúng và ước lượng sai số của chuỗi luân phiên.

Định lý: (Định lý ước lượng chuỗi luân phiên) Nếu $s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ là tổng của một chuỗi thoả mãn

$$(i)\ b_{n+1} < b_n \qquad \text{và} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

thì $|R_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$.
Điều này có nghĩa, ta có xấp xỉ $s \approx s_n$ với sai số $|R_n| \leq b_{n+1}$.

Ví dụ: Tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ chính xác đến ba chữ số thập phân. (với định nghĩa $0! = 1$).

Giải: Ta có

$$\begin{array}{ll} (i) & b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!(n+1)} < \dfrac{1}{n!} = b_n \\ (ii) & 0 < \dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{n} \text{ nên } b_n = \dfrac{1}{n!} \to 0 \text{ khi } n \to \infty \end{array},$$

nên chuỗi đã cho hội tụ. Viết ra tổng của một vài phần tử đầu của chuỗi

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \cdots \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \cdots \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$b_7 = \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} = 0.0002$$

và

$$s_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0.368056$$

Bằng Định lý ước lượng chuỗi luân phiên ta có

$$|s - s_6| \leq b_7 < 0.0002$$

Sai số này nhỏ hơn 0.0002 không tác động đến ba chữ số thập phân, vậy nên ta có

$$s \approx 0.368$$

chính xác đến ba chữ số thập phân.

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

Định nghĩa 4.2. Một chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum |a_n|$ hội tụ.

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

Định nghĩa 4.2. Một chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum |a_n|$ hội tụ.

Định lí 4.2*.* Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

Định nghĩa 4.2. Một chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum |a_n|$ hội tụ.

Định lí 4.2*.* Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Định lí 4.3*.* **(Tiêu chuẩn tỷ số)**

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

Định nghĩa 4.2. Một chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum |a_n|$ hội tụ.

Định lí 4.2. Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Định lí 4.3. **(Tiêu chuẩn tỷ số)**

(i) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (và hiển nhiên hội tụ).

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

Định nghĩa 4.2. Một chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum |a_n|$ hội tụ.

Định lí 4.2. Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Định lí 4.3. **(Tiêu chuẩn tỷ số)**

(i) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (và hiển nhiên hội tụ).

(ii) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

4.3 Chuỗi hội tụ tuyệt đối - Tiêu chuẩn tỷ số.

Định nghĩa 4.2. Một chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum |a_n|$ hội tụ.

Định lí 4.2. Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Định lí 4.3. **(Tiêu chuẩn tỷ số)**

(i) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (và hiển nhiên hội tụ).

(ii) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

(iii) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L = 1$, tiêu chuẩn tỷ số không đem lại kết quả cuối cùng; nghĩa là, không có kết luận gì về tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

5 Chuỗi lũy thừa.

5 Chuỗi lũy thừa.

5.1 Khái niệm chuỗi lũy thừa.

5 Chuỗi lũy thừa.

5.1 Khái niệm chuỗi lũy thừa.

Định nghĩa 5.1. Một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots \quad (5.1)$$

trong đó x là biến độc lập, $a, c_1, c_2, \ldots, c_n, \cdots \in \mathbb{R}$, được gọi là một **chuỗi luỹ thừa theo** $(x-a)$ hoặc một **chuỗi luỹ thừa tâm tại** a.

5 Chuỗi lũy thừa.

5.1 Khái niệm chuỗi lũy thừa.

Định nghĩa 5.1. Một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots \quad (5.1)$$

trong đó x là biến độc lập, $a, c_1, c_2, \ldots, c_n, \cdots \in \mathbb{R}$, được gọi là một **chuỗi luỹ thừa theo** $(x-a)$ hoặc một **chuỗi luỹ thừa tâm tại** a.

Chú ý rằng, việc viết ra phần tử tương ứng với $n = 0$ trong phương trình (5.1) chúng ta quy ước $(x-a)^0 = 1$, ngay cả khi $x = a$.

5.2 Bán kính hội tụ, miền hội tụ.

Cho chuỗi lũy thừa (5.1), với $x_0 \in \mathbb{R}$ ta nhận được một chuỗi số

5.2 Bán kính hội tụ, miền hội tụ.

Cho chuỗi lũy thừa (5.1), với $x_0 \in \mathbb{R}$ ta nhận được một chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n. \tag{5.2}$$

Định nghĩa 5.2.

5.2 Bán kính hội tụ, miền hội tụ.

Cho chuỗi lũy thừa (5.1), với $x_0 \in \mathbb{R}$ ta nhận được một chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_0 - a)^n. \tag{5.2}$$

Định nghĩa 5.2.

(1) x_0 được gọi là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa (5.1) nếu chuỗi số (5.2) hội tụ.

5.2 Bán kính hội tụ, miền hội tụ.

Cho chuỗi lũy thừa (5.1), với $x_0 \in \mathbb{R}$ ta nhận được một chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_0 - a)^n. \tag{5.2}$$

Định nghĩa 5.2.

(1) x_0 được gọi là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa (5.1) nếu chuỗi số (5.2) hội tụ.

(2) x_0 được gọi là điểm phân kỳ của chuỗi lũy thừa (5.1) nếu chuỗi số (5.2) phân kỳ.

5.2 Bán kính hội tụ, miền hội tụ.

Cho chuỗi lũy thừa (5.1), với $x_0 \in \mathbb{R}$ ta nhận được một chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n. \tag{5.2}$$

Định nghĩa 5.2.

(1) x_0 được gọi là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa (5.1) nếu chuỗi số (5.2) hội tụ.

(2) x_0 được gọi là điểm phân kỳ của chuỗi lũy thừa (5.1) nếu chuỗi số (5.2) phân kỳ.

(3) Tập tất cả các giá trị x mà tại đó chuỗi lũy thừa hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi.

Định lí 5.1. Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

Định lí 5.1. Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

Định lí 5.1*.* Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

Định lí 5.1. Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kỳ nếu $|x-a| > R$.

Định lí 5.1. Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kỳ nếu $|x-a| > R$.

Định nghĩa 5.3.

Định lí 5.1. Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kỳ nếu $|x-a| > R$.

Định nghĩa 5.3.

(1) Số R trong trường hợp (iii) của Định lý 5.1 được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Định lí 5.1. Với một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ chỉ có thể có ba trường hợp sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kỳ nếu $|x-a| > R$.

Định nghĩa 5.3.

(1) Số R trong trường hợp (iii) của Định lý 5.1 được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

(2) Chúng ta quy ước, bán kính hội tụ lần lượt bằng 0 và bằng ∞ tương ứng với trường hợp (i) và (ii) của Định lý 5.1.

Chú ý:

Chú ý:

(i) Trong trường hợp (i) của Định lý 5.1, miền hội tụ chỉ chứa một điểm đơn a.

Chú ý:

(i) Trong trường hợp (i) của Định lý 5.1, miền hội tụ chỉ chứa một điểm đơn a.

(ii) Trong trường hợp (ii) của Định lý 5.1, miền hội tụ là $(-\infty, \infty)$.

Chú ý:

(i) Trong trường hợp (i) của Định lý 5.1, miền hội tụ chỉ chứa một điểm đơn a.

(ii) Trong trường hợp (ii) của Định lý 5.1, miền hội tụ là $(-\infty, \infty)$.

(iii) Trong trường hợp (iii), chú ý rằng bất đẳng thức $|x - a| < R$ có thể viết lại bằng $a - R < x < a + R$. Khi x bằng một điểm đầu mút của khoảng, nghĩa là $x = a \pm R$, mọi điều có thể xả ra-chuỗi có thể hội tụ tại một điểm, hội tụ tại cả hai điểm hoặc nó có thể phân kỳ tại cả hai điểm.

Chú ý:

(i) Trong trường hợp (i) của Định lý 5.1, miền hội tụ chỉ chứa một điểm đơn a.

(ii) Trong trường hợp (ii) của Định lý 5.1, miền hội tụ là $(-\infty, \infty)$.

(iii) Trong trường hợp (iii), chú ý rằng bất đẳng thức $|x - a| < R$ có thể viết lại bằng $a - R < x < a + R$. Khi x bằng một điểm đầu mút của khoảng, nghĩa là $x = a \pm R$, mọi điều có thể xả ra-chuỗi có thể hội tụ tại một điểm, hội tụ tại cả hai điểm hoặc nó có thể phân kỳ tại cả hai điểm.

Vậy, trong trường hợp (iii) có bốn khả nằng xảy ra đối với miền hội tụ

$$(a-R, a+R) \quad (a-R, a+R] \quad [a-R, a+R) \quad [a-R, a+R]$$

6 Biểu diễn hàm bằng tổng của một chuỗi lũy thừa.

6 Biểu diễn hàm bằng tổng của một chuỗi lũy thừa.

6.1 Biểu diễn hàm bằng tổng của một chuỗi lũy thừa.

Chúng ta bắt đầu với tổng của một chuỗi luỹ thừa (chuỗi cấp số nhân)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1. \tag{6.1}$$

Điều này có nghĩa hàm $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, được biểu diễn bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa. Tổng quát ta có khái niệm sau.

Chúng ta bắt đầu với tổng của một chuỗi luỹ thừa (chuỗi cấp số nhân)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1. \tag{6.1}$$

Điều này có nghĩa hàm $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, được biểu diễn bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa. Tổng quát ta có khái niệm sau.

Định nghĩa: Hàm $f(x), x \in (a-R, a+R)$ được gọi là có thể biểu diễn bằng tổng của một chuỗi lũy thừa nếu ta có biểu diễn

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad |x-a| < R,$$

với R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa trong vế phải của đẳng thức.

Ví dụ: Biểu diễn hàm $1/(1+x^2)$ bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa và tìm khoảng hội tụ.

Giải: Thay x bởi $-x^2$ trong phương trình (6.1), ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Vì đây là chuỗi cấp số nhân, nó hội tụ khi $|-x^2| < 1$, nghĩa là $x^2 < 1$, hoặc $|x| < 1$. Vậy nên khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

6.2 Đạo hàm và tích phân của một chuỗi lũy thừa - ứng dụng.

6.2 Đạo hàm và tích phân của một chuỗi lũy thừa - ứng dụng.

Định lý: Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum c_n(x-a)^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$, khi đó hàm f xác định bởi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

khả vi (và hiển nhiên liên tục) trên khoảng $(a-R, a+R)$ và

6.2 Đạo hàm và tích phân của một chuỗi lũy thừa - ứng dụng.

Định lý: Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum c_n(x-a)^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$, khi đó hàm f xác định bởi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

khả vi (và hiển nhiên liên tục) trên khoảng $(a-R, a+R)$ và

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-2)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

6.2 Đạo hàm và tích phân của một chuỗi lũy thừa - ứng dụng.

Định lý: Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum c_n(x-a)^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$, khi đó hàm f xác định bởi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

khả vi (và hiển nhiên liên tục) trên khoảng $(a-R, a+R)$ và

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-2)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Ví dụ: Biểu diễn $1/(1-x)^2$ bằng một chuỗi luỹ thừa bằng cách đạo hàm phương trình (6.1). Bán kính hội tụ bằng bao nhiêu?

Giải: Đạo hàm hai vế của phương trình

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ta được

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Nếu cần chúng ta có thể thay n bởi $n+1$ và viết kết quả dưới dạng

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Ta cũng có bán kính hội tụ của chuỗi đạo hàm trùng với bán kính hội tụ của chuỗi ban đầu, vậy $R = 1$.

Ví dụ: Tìm chuỗi luỹ thừa biểu diễn hàm $\ln(1-x)$ và bán kính hội tụ của nó.

Giải: Ta có $-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}dx$. Do đó lấy tích phân hai vế của phương trình (6.1):

$$
\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= \int \frac{1}{1-x}dx = \int (1+x+x^2+\cdots)dx \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1
\end{aligned}
$$

Thay $x = 0$ vào hai phương trình và nhận được $-\ln(1-0) = C$.
Vậy $C = 0$ và

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

Bán kính hội tụ là bán kính hội tụ của chuỗi ban đầu, $R = 1$.

Ví dụ:

(a) Xác định $\int \frac{1}{1+x^7}dx$ bằng một chuỗi luỹ thừa.

(b) Sử dụng phần (a) để xấp xỉ $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx$ phạm vi chính xác nhỏ hơn 10^{-7}.

Giải:

(a) Bước thứ nhất chúng ta biểu diễn hàm $1/(1+x^7)$ bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa.

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^7)^n$$

Bây giờ chúng ta tích phần từng phần tử

$$\int \frac{1}{1+x^7}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{7n}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

Chuỗi này hội tụ với $|-x^7| < 1$, nghĩa là, với $|x| < 1$.
(b) Sử dụng nguyên hàm biểu thức (a) với $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots\right]_0^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8.2^8} + \frac{1}{15.2^{15}} - \frac{1}{22.2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Sử dụng Định lý ước lượng tổng của chuỗi luân phiên để xấp xỉ tổng của chuỗi. Nếu dùng tổng sau phần tử với $n = 3$, sai số nhỏ hơn phần tử b_4:

$$\frac{1}{29.2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

Vậy chúng ta có

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx \approx s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8.2^8} + \frac{1}{15.2^{15}} - \frac{1}{22.2^{22}} \approx 0.49952374$$

6.3 Khai triển Taylor và khai triển Maclaurin.

6.3 Khai triển Taylor và khai triển Maclaurin.

Định lý: Nếu f có một biểu diễn bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa (sự khai triển) tại a, nghĩa là, nếu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

thì các hệ số được cho bởi công thức $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

6.3 Khai triển Taylor và khai triển Maclaurin.

Định lý: Nếu f có một biểu diễn bằng tổng của một chuỗi luỹ thừa (sự khai triển) tại a, nghĩa là, nếu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

thì các hệ số được cho bởi công thức $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{6.2}$$

Chuỗi trong phương trinh (6.2) được gọi là **chuỗi Taylor của hàm** f **tại** a (hoặc **xấp xỉ** a hoặc **lân cận điểm** a).

Chuỗi trong phương trinh (6.2) được gọi là **chuỗi Taylor của hàm f tại a** (hoặc **xấp xỉ** a hoặc **lân cận điểm** a).

Đối với trường hợp đặc biệt $a = 0$, chuỗi Taylor trở thành

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots \quad (6.3)$$

Khi đó chuỗi đã cho được gọi là **chuỗi Maclaurin**, và khai triển này được gọi là *khai triển Maclaurin*.

Chúng ta tập hợp lại một số chuỗi Maclaurin quan trọng:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Một trong những lý do để các chuỗi Taylor trở nên quan trọng là chúng giúp chúng ta có thể tính gần đúng tích phân các hàm mà trước đây chúng ta không giải quyết được.

Một trong những lý do để các chuỗi Taylor trở nên quan trọng là chúng giúp chúng ta có thể tính gần đúng tích phân các hàm mà trước đây chúng ta không giải quyết được.

Ví dụ:

(a) Biểu diễn $\int e^{-x^2}dx$ bằng một chuỗi vô hạn.

(b) Tính $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ chính xác với sai số nhỏ hơn 0.001.

Giải:

(a) Trước hết chúng ta tìm chuỗi Maclaurin đối với $f(x) = e^{-x^2}$. Mặc dù chúng ta có thể sử dụng phương pháp trực tiếp, nhưng hãy tìm cách đơn giản hơn bằng việc thay x bằng $-x^2$ trong chuỗi đối với e^x cho trong bảng các chuỗi Maclaurin. Vậy, với mọi x chúng ta có

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Bây giờ chúng ta tích phân từng hạng tử

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Chuỗi này hội tụ với mọi x vì chuỗi ban đầu đối với e^{-x^2} hội tụ với mọi x.

(b) Ta có

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

$$\approx 0.7475$$

Định lý ước lượng chuỗi luân phiên chỉ ra rằng sai số tương ứng với xấp xỉ này nhỏ hơn

$$\frac{1}{11.5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$