BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI DUY TÂN

Khoa:	**Khoa học tự nhiên.**
Bộ môn:	**Toán**
Giảng viên:	**TS. Đặng Văn Cường**

TOÁN CAO CẤP A1

(Ví dụ và Bài tập)

Đà Nẵng - 2013

Chương 2

Đạo hàm - Ứng dụng

2.1 Đạo hàm

Ví dụ 2.1.1. Hàm $f(x) = |x|$ khả vi tại những điểm nào?

Giải. Nếu $x > 0$ thì $|x| = x$ và chúng ta có thể chọn h đủ nhỏ sao cho $x + h > 0$ và như vậy $|x + h| = x + h$. Do đó, với $x > 0$ ta có:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

và như vậy f khả vi với mọi $x > 0$.

Tương tự, với $x < 0$ thì $|x| = -x$ và chúng ta có thể chọn h đủ nhỏ sao cho $x + h < 0$ và như vậy $|x + h| = -(x + h)$. Do đó, với $x < 0$ ta có:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

và như vậy f khả vi với mọi $x < 0$.

Với x=0, chúng ta phải kiểm tra

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}.$$

Chúng ta tính toán giới hạn bên trái và giới hạn bên phải:

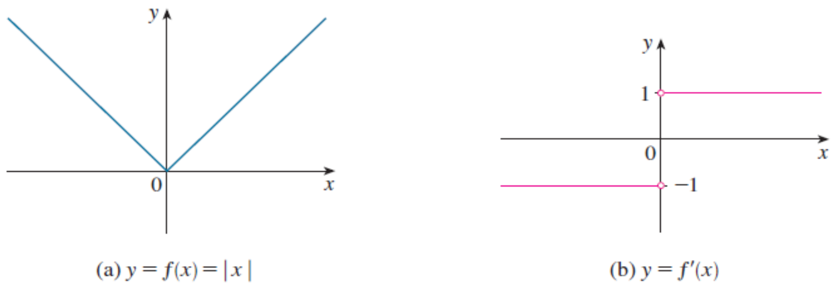
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

và

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1.$$

Vì các giới hạn đó là khác nhau nên $f'(0)$ không tồn tại. Vậy f khả vi tại mọi x trừ 0. Công thức của f' được cho bởi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad x > 0 \\ -1 & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}.$$



Hình 2.2.5

Ví dụ 2.1.2. Tính đạo hàm a/ $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}^2}$. b/ $\mathrm{y} = \sqrt[3]{\mathrm{x}^2}$.

Giải: Trong mỗi tường hợp ta viết lại các hàm dưới dạng hàm luỹ thừa của x. Vì $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}^2} = x^{-2}$ nên ta có

$$a/\ \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{x}^{-2}\right) = -2\mathrm{x}^{-2-1} = -2\mathrm{x}^{-3} = -\frac{2}{\mathrm{x}^3}.$$

$$b/\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\left(\sqrt[3]{\mathrm{x}^2}\right) = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{x}^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\mathrm{x}^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\mathrm{x}^{-\frac{1}{3}}$$

Ví dụ 2.1.3.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^8) + 12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^5) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^4) + 10\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^3) - 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(5) \\ &= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\ &= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.4. a) Nếu $f(x) = xe^x$, tìm $f'(x)$. b) Tìm đạo hàm cấp n , $f^{(n)}(x)$.

Giải: a) Theo quy tắc tích, ta có

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x.$$

b) Dùng quy tắc tích cho lần hai thì ta được

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] = (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) = xe^x + e^x + e^x = (x+2)e^x.$$

$$f'''(x) = (x+3)e^x,\ \ f^{(4)}(x) = (x+4)e^x.$$

Ta thấy , sau mỗi lần đạo hàm thì kết quả thu được được thêm e^x, vậy nên

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

Ví dụ 2.1.5. Tính vi phân của hàm $y = x2sinx$.

Giải: Sử dụng quy tắc nhân, ta có

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\mathrm{s\,inx}) + \mathrm{sinx}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^2) = x^2\mathrm{cosx} + 2\mathrm{xsinx}.$$

Ví dụ 2.1.6. Tìm $F'(x)$ biết $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Giải 1: Đầu tiên ta biểu diễn F dưới dạng $F(x) = (f.g)(x)$ với $f(u) = \sqrt{u}$ và $g(x) = x^2+1$. Khi đó $f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ và $g'(x) = 2x$. Ta có

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Giải 2: Nếu đặt $u = x^2+1$ và $y = \sqrt{u}$. thì

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ví dụ 2.1.7. Tính vi phân $y = (x^3-1)^{100}$.

Giải: Đặt $u = g(x) = x^3 1$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-1)^{100} = 100(x^3-1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3-1) = 100(x^3-1)^{99}.3x^2 = 300x^2(x^3-1)^{99}.$$

Ví dụ 2.1.8. Tìm $f'(x)$ nếu $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Giải: Trước hết viết lại f: $f(x) = (x^2+x+1)^{-1/3}$. Do đó

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{4/3}\frac{d}{dx}(x^2+x+1) = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3}(2x+1).$$

Ví dụ 2.1.9. Tìm đạo hàm của hàm $g(t) = (\frac{t-2}{2t+1})^9$.

Giải: Tổ hợp các quy tắc tính đạo hàm hàm mũ, hàm hợp, thương, ta có:

$$g'(t) = 9(\frac{t-2}{2t+1})^8\frac{d}{dt}(\frac{t-2}{2t+1}) = 9(\frac{t-2}{2t+1})^8\frac{(2t+1).1-2(t-2)}{(2t+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}.$$

Ví dụ 2.1.10. Tính đạo hàm $y = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$.

Giải: Trong ví dụ này chúng ta phải sử dụng quy tắc nhân trước khi sử dụng quy tắc hàm hợp

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (2x+1)^5\frac{d}{dx}(x^3-x+1)^4 + (x^3-x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)^5\\ &= (2x+1)^5.4(x^3-x+1)^3\frac{d}{dx}(x^3-x+1) + (x^3-x+1)^4.5(2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)\cdot\\ &= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1)(3x^2-1) + 5(x^3-x+1)^4(2x+1)^4 2\end{aligned}$$

chú ý mỗi hạng tử có nhân tử chung $2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3$, ta đặt nhân tử chung ra ngoài và viết lại dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3).$$

Ví dụ 2.1.11. Tính đạo hàm $y = e^{\mathrm{s\,inx}}$.

Giải: Với $g(x) = \sin x$ và hàm ngoài là hàm mũ $f(x) = e^x$. Vì thế, theo quy tắc hàm hợp

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\mathrm{s\,inx}}) = e^{\mathrm{s\,inx}}\frac{d}{dx}(\mathrm{s\,inx}){=}\mathrm{e^{sinx}}\mathrm{cosx}.$$

Ta có thể sử dụng quy tắc hàm hợp để đạo hàm hàm mũ với cơ số $a > 0$. Nhắc lại $a = e^{\ln a}$. Vì thế

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x}.$$

Và theo quy tắc hàm hợp ta có

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x = e^{(\ln a)x}.\ln a = a^x \ln a.$$

Ví dụ 2.1.12. Tìm $f'(x)$ với $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))\left[-\sin(\tan x)\right]\frac{d}{dx}\tan x \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\sin(\tan x)sec^2x. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.13. a). Cho $x^2 + y^2 = 25$. Tìm $\frac{dy}{dx}$. (b). Tìm một phương trình của tiếp tuyến với đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ tại điểm $(3, 4)$.

Giải: (a). Vi phân hai vế của phương trình $x^2 + y^2 = 25$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x^2{+}y^2) &= \frac{dy}{dx}(25) \\ \frac{dy}{dx}(x^2){+}\frac{dy}{dx}(y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Nhớ lại rằng y là một hàm của x và dùng quy tắc đạo hàm của hàm hợp chúng ta có:

$$\frac{dy}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Do đó $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$. Bây giờ chúng ta giải phương trình này theo dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

(b). Tại điểm $(3, 4)$ chúng ta có $x = 3$ và $y = 4$, do đó $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$. Như thế, phương trình của tiếp tuyến với đường tròn tại (3,4) là: $y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$ hay $3x + 4y = 25$.

Ví dụ 2.1.14. (a). Tìm y nếu $x^3 + y^3 = 6xy$. (b). Tìm tiếp tuyến với Lá Đềcác $x^3 + y^3 = 6xy$ tại điểm $(3, 3)$.

(c). Tại điểm nào trên đường cong thì tiếp tuyến nằm ngang?

Giải: (a). Vi phân hai vế của $x^3 + y^3 = 6xy$ theo x, xem y như là hàm của x, và dùng quy tắc đạo hàm của hàm hợp cho y^3 và quy tắc tích cho $6xy$, chúng ta nhận được:

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy' \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'.$$

Bây giờ chúng ta giải theo y' :

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2 \Leftrightarrow (y^2 - 2x)y' = 2y - x^2 \Leftrightarrow y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

(b). Khi $x = y = 3$, ta có $y' = \frac{2.3-3^2}{3^2-2.3} = -1$. Vì vậy một phương trình của tiếp tuyến với đường Lá Đềcác tại $(3, 3)$ là: $y - 3 = -1(x - 3)$ hay $x + y = 6$.

(c). Đường thẳng tiếp tuyến là nằm ngang nếu $y' = 0$. Dùng biểu thức của y từ phần (a) chúng ta thấy rằng $y' = 0$ khi $2y - x2 = 0$. Thay $y = \frac{1}{2}x^2$ vào phương trình của đường cong chúng ta nhận được $x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x.\left(\frac{1}{2}x^2\right)$, suy ra $x^6 = 16x^3$. Vì thế ta có $x = 0$ hoặc $x^3 = 16$. Nếu $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$ thì $y = \frac{1}{2}2^{8/3} = 2^{5/3}$. Do đó, tiếp tuyến nằm ngang tại $(0, 0)$ và tại $(2^{4/3}, 2^{5/3})$.

Ví dụ 2.1.15. Tìm đạo hàm của (a) $y = \frac{1}{\sin^{-1}x}$ và (b) $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$.

Giải:

(a).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right) = -(\sin^{-1}x)^{-2}.\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = -\frac{1}{(\sin^{-1}x)^{-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

(b).

$$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \arctan\sqrt{x}.$$

Ví dụ 2.1.16. Tính vi phân $y = \ln(x^3 + 1)$.

Giải: Để dùng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, chúng ta đặt $u = x^3 + 1$. Khi đó $y = ln(u)$. Ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1}.$$

Ví dụ 2.1.17. Tìm $\frac{d}{dx}\ln(\sin x)$.

Giải: Ta có:

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x}.\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x}.\cos x = \cot x.$$

Ví dụ 2.1.18. Tính vi phân $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

Giải: Lần này logarit nằm trong hàm khác, do đó quy tắc đạo hàm của hàm hợp cho ta

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Ví dụ 2.1.19. Tính vi phân $f(x) = \log_{10}(2+\sin x)$.

Giải: Ta có:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\sin x) = \frac{1}{(2+\sin x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\sin x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)\ln 10}.$$

Ví dụ 2.1.20. Tìm $\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

Giải:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}}.\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}.\frac{\sqrt{x-2}.1-(x+1).(\frac{1}{2}).(x-2)^{-1/2}}{x-2}\\ &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}.\end{aligned}$$

Cách giải 2: Nếu chúng ta đơn giản hóa hàm đã cho bằng cách dùng phép toán logarit thì việc tính vi phân sẽ trở nên dễ dàng hơn:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right] = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right).$$

Ví dụ 2.1.21. Tính đạo hàm của $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

Giải: Chúng ta lấy logarit của hai vế phương trình và dùng các phép toán logarit để đơn giản hóa:

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2).$$

Đạo hàm hàm ẩn theo biến x ta được

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+1} - 5.\frac{3}{3x+2}.$$

Giải theo dy/dx chúng ta nhận được

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right).$$

Vì chúng ta có biểu thức hàm hiện theo y nên chúng ta có thể thay vào và viết dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right).$$

Ví dụ 2.1.22. Tính vi phân $y = x^{\sqrt{x}}$.

Giải: Dùng logarit vi phân ta có:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x;\ \frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x} + (\ln x).\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y' = y\left(\sqrt{x}.\frac{1}{x} + (\ln x).\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right).$$

Giải cách 2: Phương pháp khác là viết $x^{\sqrt{x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\sqrt{x}}$,

$$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}\ln x}) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right).$$

BÀI TẬP

1 - 22. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $\mathrm{f(x)} = 186.5$.
2. $\mathrm{f(x)} = \sqrt{30}$.
3. $\mathrm{f(x)} = 9\mathrm{x}^4 - 3\mathrm{x}^2 + 8$.
4. $\mathrm{g(x)} = 5\mathrm{x}^8 - 2\mathrm{x}^5 + 6$.
5. $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{4}(\mathrm{t}^4 + 8)$.
6. $\mathrm{h(x)} = (\mathrm{x} - 2)(2\mathrm{x} + 3)$.
7. $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{-\frac{2}{5}}$.
8. $\mathrm{y} = 5\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 3$.
9. $\mathrm{G(x)} = \sqrt{\mathrm{x}} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.
10. $\mathrm{R(t)} = 5\mathrm{t}^{-\frac{3}{5}}$.
11. $\mathrm{V(r)} = \dfrac{4}{3}\mathrm{r}^3$.
12. $\mathrm{R(x)} = \dfrac{\sqrt{10}}{\mathrm{x}^7}$.
13. $\mathrm{F(x)} = (16\mathrm{x})^3$.
14. $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x}}(\mathrm{x} - 1)$.
15. $\mathrm{y} = 4^2$.
16. $\mathrm{g(x)}=\sqrt{2}\mathrm{u}+\sqrt{3\mathrm{u}}$.
17. $\mathrm{y}=\dfrac{\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+3}{\sqrt{\mathrm{x}}}$.
18. $\mathrm{y}=\dfrac{\mathrm{x}^2 - 2\sqrt{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}}$.
19. $\mathrm{v}=\mathrm{t}^2\text{-}\dfrac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{t}^3}}$.
20. $\mathrm{y}=\mathrm{ae}^{\mathrm{u}}+\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{v}}+\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{v}^2}$.
21. $\mathrm{z}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{y}^{10}}+\mathrm{Be}^{\mathrm{y}}$.
22. $\mathrm{u}=\sqrt[3]{\mathrm{t}^2}+2\sqrt{\mathrm{t}^3}$.

23 - 24. Tìm phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến với đường cong tại điểm cho trước 23. $y = x^4{+}2e^x, \qquad (0;2)$. 24. $y = (1 + 2x)^2, \qquad (1;9)$.

25 - 28. Tìm đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm số:

25. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$. 26. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$.

27. $f(x) = 2x - 5x^{\frac{3}{4}}$. 28. $f(x) = e^x - x^3$.

29 - 42. Tìm đạo hàm của các hàm sau.

29. $f(x) = x^2 e^x$.
30. $g(x) = \sqrt{x}e^x$.
31. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$.
32. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$.
33. $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.
34. $f(u) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$.
35. $y = \left(r^2 - 2r\right) e^r$.
36. $H(t) = e^t \left(1 + 3t^2 + 5t^4\right)$.
37. $y = \dfrac{t^2}{3t^2 - 2t + 1}$.
38. $y = \dfrac{t^3 + t}{t^4 - 2}$
39. $F(u) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^3}\right)\left(y + 5y^3\right)$.
40. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$.
41. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$.
42. $z = w^{3/2}\left(w + ce^w\right)$.

43. Với $f(x) = x/\left(x^2 + 1\right)$, tìm $f'(x)$ và $f''(x)$.

44. Với $f(x) = x^2/\left(1 + x\right)$ tìm $f''(x)$.

45. Với $g(x) = x/e^x$ tìm $g^{(n)}(x)$.

46 - Tính đạo hàm các hàm số sau.

46. $f(x) = x^3 sinx$. 47. $g(t) = 4sect + \tan t$. 48. $g(t) = t^3 \cos t$.

49. $f(x) = \sqrt{x}\sin x$. 50. $y = \sec\theta\tan\theta$. 51. $y = e^u(\cos u + cu)$.

52. $y = \dfrac{x}{\cos x}$. 52. $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. 53. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1+\sec\theta}$.

55. $y = \dfrac{1-\sec x}{\tan x}$. 56. $f(x) = xe^x\csc x$. 57. $y = \csc\theta(\theta + \cot\theta)$.

58 - 59. Tính đạo hàm bằng cách tính một số đạo hàm đầu tiên và quan sát xem điều gì xảy ra.

58. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x)$. 59. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x\sin x)$.

60. Tìm hằng số A và B sao cho hàm $y = A\sin x + B\cos x$ thoả mãn phương trình vi phân $y'' + y' - 2y = sinx$.

61 - Tìm dy/dx bằng cách vi phân hàm ẩn.

61. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$. 62.$x^2 - 2xy + y^3 = c$. 63. $x^2y + xy^2 = 3x$.

64. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$. 65. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$. 66. $1 + x = \sin(xy^2)$.

67. $4\cos x\sin y = 1$. 68. $x\cos y + y\cos x = 1$. 69. $e^{x/y} = x - y$.

70. $y\sin x + \cos y = \sin x.\cos y$.

71. Cho $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 0$ và $f(1) = 2$. Tìm $f'(1)$.

72. Cho $g(x) + x\sin g(x) = x^2$. Tìm $g(0)$.

73 - 78. Dùng vi phân hàm ẩn để tìm một phương trình của đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại điểm cho sẵn.

73. $x^2 + xy + y^2 = 3,\quad (1,1)$ (Đường Elip).

74. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2,\quad (1,2)$ (Đường Hypebol).

75. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2,\quad (0,1/2)$ (Đường trái tim).

76. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4,\quad (-3\sqrt{3},1)$ (Đường hình sao).

77. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2),\quad (3,1)$ (Đườngg Lemiscat).

78. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5),\quad (0,-2)$ (Đường của ma quỷ).

79 - 95. Tính đạo hàm các hàm sau:

79 .$f(x) = \ln(x^2 + 10)$. 80. $f(\theta) = \ln(\cos\theta)$. 81. $f(x) = \cos(\ln x)$.

82.$f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$. 83. $f(x) = \ln\sqrt[5]{x}$. 84. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$.

85. $f(x) = \log_5(xe^x)$. 86. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$. 87. $f(t) = \dfrac{1+\ln t}{1-\ln t}$.

88. $F(t) = \ln \dfrac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4}$. 89. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. 90. $y = \dfrac{\ln x}{1+x}$.

91. $y = \ln(x^4 \sin^2 x)$. 92. $y = \ln\left|2 - x - 5x^2\right|$. 93. $G(u) = \ln\sqrt{\dfrac{3u+2}{3u-2}}$.

94. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$. 95. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$.

96 - Dùng logarit hoá để tìm đạo hàm của hàm.

96. $y = (2x+1)^5 (x^4 - 3)^6$. 97. $y = \sqrt{x} e^{x^2} (x^2 + 1)^{10}$. 98. $y = \dfrac{\sin^2 x \tan^4 x}{(x^2+1)^2}$.

99. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$. 100. $y = x^x$. 101. $y = x^{\cos x}$.

102. $y = (\cos x)^x$. 103. $y = \sqrt{x}^x$. 104. $y = (\tan)^{1/x}$.

105. $y = (\sin x)^{\ln x}$.

2.2 Ứng dụng của đạo hàm

2.2.1 Các tỷ lệ thay đổi trong khoa học tự nhiên và khoa học xã hội

Ví dụ 2.2.1. Vị trí của một hạt được cho bởi phương trình $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với t được đo theo đơn vị giây và s được đo theo đơn vị mét.

a) Tìm vận tốc tại thời điểm t.

b) Tìm vận tốc sau 2 giây? Sau 4 giây?

c) Khi nào hạt đứng yên?

d) Khi nào hạt di chuyển đi tới? (nghĩa là hạt di chuyển theo hướng dương).

e) Vẽ biểu đồ minh họa sự chuyển động của hạt.

f) Tìm tổng quảng đường hạt đi được trong 5 giây đầu tiên.

g) Tìm gia tốc tại thời điểm t và sau 4 giây.

h) Vẽ đồ thị các hàm vị trí, vận tốc, gia tốc của hạt với $0 \le t \le 5$.

i) Khi nào hạt đi tới nhanh? Khi nào hạt lùi chậm?

Ví dụ 2.2.2. Một cây gậy hoặc thanh kim loại đồng chất, khi đó mật độ tuyến tính của nó là như nhau và được xác định bằng khối lượng trên một đơn vị độ dài ($\rho = m/l$) và đơn vị đo là kilogram trên mét. Tuy nhiên, giả sử cây gậy không đồng chất, nhưng khối lượng của nó được đo từ đầu mút tới điểm x là $m = f(x)$. Khối lượng của cây gậy phần nằm giữ x_1 và x_2 được cho bởi $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, vì vậy mật độ trung bình của nó là

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Bây giờ, nếu chúng ta cho $\Delta x \to 0$ (nghĩa là $x_2 \to x_1$), chúng ta đang tính mật độ trung bình trên một khoảng rất nhỏ. Mật độ tuyến tính ρ tại x_1 là giới hạn của các mật độ trung bình khi $\Delta x \to 0$; nghĩa là mật độ tuyến tính là tốc độ thay đổi của khối lượng tương ừng với độ dài. Ký hiệu

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}.$$

Vậy, mật độ tuyến tính của cây gậy chính là đạo hàm của khối lượng tương ứng với độ dài.

Ví dụ 2.2.3. Dòng điện xuất hiện tại bất kỳ nơi mà có sự chuyển động của các hạt mang điện tích. Hình dưới chỉ ra một phần của sợi dây và các electron chuyển động qua một mặt phẳng. Nếu ΔQ là số điện tích qua mặt này trong khoảng thời gian Δt khi đó cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian này được xác định

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_t - t_1}.$$

Nếu chúng ta lấy giới hạn của cường độ trung bình trong một khoảng thời gian rất nhỏ, chúng ta nhận được những gì được gọi là cường độ dòng điện I tại thời điểm t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Ví dụ 2.2.4. Cho $n = f(t)$ là số thực thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t. Sự thay đổi số thực thể giữa hai mốc thời gian $t = t_1, t = t_2$ là

$$\Delta n = f(t_2) - f(t_1).$$

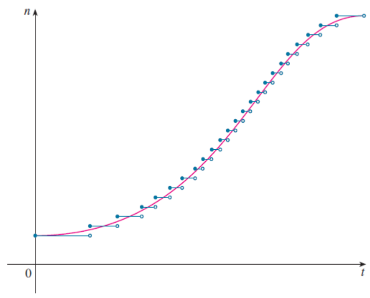
Và do đó, tỷ lệ tăng trưởng trung bình trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$ là

$$\text{tỉ lệ tăng trưởng trung bình} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Tỉ lệ tăng trưởng tức thời thu được từ tỉ lệ tăng trưởng trung bình khi Δt tiến dần về 0:

$$\text{tỉ lệ tăng trưởng} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}.$$

Nói đúng ra, tỉ lệ này không chính xác bởi vì đồ thị thực tế của hàm số thực thể $n = f(t)$ là hàm bậc thang. Đại lượng này không chính xác bởi vì đồ thị thực tế của hàm số thực thể n =f(t) là hàm bậc thang nó không liên tục khi hiện tượng sinh tử xảy ra, vì thế nó không khả vi. Tuy nhiên, nếu số thực thể tương đối lớn, ta có thể thay thế đồ thị bởi đường cong nhẵn xấp xỉ như trên Hình 2.2.1.



Hình 2.2.1

Đặc biệt hơn, xét số vi khuẩn trong một loại chất dinh dưỡng đồng nhất. Giả sử rằng số vi khuẩn tại khoảng thời gian nào đó được xác định gấp đôi sau mỗi giờ, Nếu gọi n_0 là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và t tính theo đơn vị giờ, thì

$$F(1) = 2f(0) = 2n_0; \quad F(2) = 2f(1) = 22n_0.$$

Và tổng quát, $F(t) = 2tn_0$. Hàm số vi khuẩn được xác định $n = n_0 2t$. Ta có $\frac{d}{dx}(2^x) \approx 0,69.2^x$. Vì thế tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn tại thời điểm t là

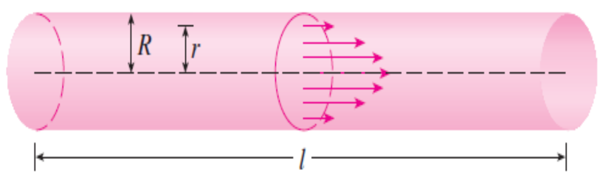
$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) \approx n_0.0,69.2^t.$$

Chẳn hạn, Giả sử số vi khuẩn ban đầu là $n_0 = 100$. Thì tỉ lệ tăng tương ứng sau 4 giờ là

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} \approx 100.0,69.2^4 = 1104.$$

Điều này có nghĩa là sau 4 giờ, số vi khuẩn tăng theo tỉ lệ khoảng 1100 vi khuẩn trên 1 giờ.

Ví dụ 2.2.5. Khi chúng ta xét dòng máu chảy trong mạch máu(tĩnh mạch hoặc động mạch), ta có thể mô phỏng hình dạng của mạch máu như một ống hình trụ với bán kính R, chiều dài l, minh hoạ trên Hình 2.2.2.



Hình 2.2.2

Bởi vì có sự va cham lên thành ống, nên vận tốc v của dòng máu tại trục tâm của ống và giảm dần về phía thành theo khoảng cách r cho đến khi $v = 0$ tại thành ống. Quan hệ giữa

v và r được cho bởi quy tắc luồng laminar được khám phá bởi nhà vật lý học người pháp Jean-Louis-Mảie Póieuille vào năm 1840. Quy tắc này xác định bởi công thức

$$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

. Trong đó η là độ dính của máu và P là áp suất chênh lệch giữa 2 đầu ống. Nếu P và l là hằng số thì v là một hàm của r với miền xác định $[0, R]$. Tỷ lệ thay đổi trung bình của vận tốc duy chuyển từ $r = r_1$ ra $r = r_2$ được xác định bởi

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}.$$

Và nếu $\Delta r \to 0$ ta thu được gradient vận tốc, có nghĩa là sự biến đổi vận tốc tức thời theo r được tính bởi

$$\text{Gradient vận tốc} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}.$$

Khi đó ta được

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{\mathrm{Pr}}{2l}.$$

Chẳng hạn, với một người có động mạch nhỏ, chọn

$$\eta = 0,027, R = 0,008cm; l = 2cm; P = 4000dyn\mathrm{es}/\mathrm{cm}^2.$$

Ta có

$$v = \frac{4000}{4.0,027.2}(0,00064 - r^2) \approx 1,85.0^4(6,4.10^{-6} - r^2)$$

tại $r = 2cm$, máu chảy với tốc độ $v(0,002) \approx 1,11cm/s$, và gradient vận tốc tương ứng là

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0,002} = -\frac{4000.0,002}{2.0,027.2} \approx -74(cm/s)/cm.$$

Nếu thay đổi từ đơn vị centimetres sang micrometres ($1cm = 10000\mu m$) thì bán kính của động mạch là $80\mu m$. Vận tốc tại tâm trục là $11850\mu m/s$, nó giảm đến $11110\mu m/s$ với khoảng cách $r = 20\mu m$. Ta có, $dv/dr = -74(\mu m/s)/\mu m$. Kết quả này nói lên rằng, khi $r = 20\mu m$, vận tốc giảm xuống theo tỉ lệ khoảng $74\mu m/s$ trên một micrometre tính từ tâm.

Ví dụ 2.2.6. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để sản xuất ra x đơn vị hàng hoá nào đó. Hàm này được gọi là hàm chi phí. Nếu số sản phẩm tăng từ x_1 đến x_2 thì chi phí tăng lên là $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$. Và tỉ lệ chi phí thay đổi trung bình

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}.$$

Giới hạn của đại lượng này khi $\Delta x \to 0$ chính là tỉ lệ thay đổi chi phí tức thời tương ứng với số sản phẩm và được gọi là chi phí cận biên theo các nhà kinh tế học:

$$\text{Chi phí biên tế} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}.$$

Vì x nhận giá trị nguyên nên không thể xảy ra trường hợp $\Delta x \to 0$, nhưng chúng ta có thể thay $C(x)$ bởi hàm trơn xấp xỉ đặt $\Delta x \to 0$ và n đủ lớn sao cho x nhỏ so với n ta có

$$C(n) \approx C(n+1) - C(n).$$

Vậy có thể biểu diễn hàm tổng chi phí bới đa thức $C(x) = a + bx + cx^2$. Với a là chi phí cố định, các hệ số tiếp theo biểu diễn chi phí nhiên liệu, công lao động, v..v..(Chi phí nguyên liệu thô tỉ lệ với x, nhưng công lao động ngoài việc phụ thuộc vào x còn phụ thuộc vào cường độ làm việc.)

Ví dụ, một công ty có thể tính được chi phí (tính theo / sản phẩm. Điều này cho thấy tỉ lệ chi phí tăng theo số sản phẩm khi $x = 500$ và có thể tiên đoán rằng nếu sản xuất 501 sản phẩm thì chi phí sẽ tăng lên $C(501)C(500) = 15,1$.

Các nhà kinh tế nghiên cứu nhu cầu, lợi tức và lợi nhuận biên tế, nó chính là đạo hàm của các hàm nhu cầu, lợi tức và lợi nhuận . Điều này sẽ được nghiên cứu trong chương 6 sau khi chúng ta nghiên cứu cách tìm giá trị cực đại, cực tiểu của hàm.

BÀI TẬP

1. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,\ t \geq 0$ trong đó t tính theo s và S tính theo m.

a) Tìm vận tốc tại thời điểm t.

b) Tìm vận tốc sau $3s$.

c) Khi nào thì chất điểm rơi vào trạng thái nghỉ?

d) khi nào thì chất điểm tiến về phía trước?

e) Tìm tổng quảng đường đi sau $8s$?

f) Vẽ đồ thị như trên hình 2 để minh hoạ chuyển động của chất điểm.

h)Vẽ đồ thị của các hàm vận tốc, gia tốc, khoảng cách trong khoảng $0 \leq t \leq 8$.

i) Khi nào thì chất điểm đạt tốc độ cao nhất, thấp nhất?

2. Một chất điểm chuyển động theo trục ox, vị trí của nó tại thời điểm t cho bởi biểu thức $x(t) = t/(1+t)^2, t \geq 0$ với t tính theo s và s tính theo m.

a) Tìm vận tốc tại thời điểm t?

b) Khi nào thì chất điểm dịch chuyển qua trái, qua phải ?

c) Tìm tổng khoảng cách đi đượpc trong $4s$?

d) Tìm gia tốc tại thời điểm t, khi nào thì gia tốc bằng 0?

e) Vẽ đồ thị của các hàm vận tốc, gia tốc, khoảng cách trong khoảng $0 \leq t \leq 4$. f) Khi nào thì chất điểm đạt tốc độ cao nhất, thấp nhất?

4. Hàm khoảng cách của một chất điểm cho bởi phương trình $S = t^3 - 4,5t^2 - 7t$. a) Khi nào thì chất điểm đạt vận tốc $5m/s$?

b) khi nào gia tốc =0? ý nghĩa của giá trị t tìm được?

5. Một quả bóng lăn với vận tốc ban đầu $5m/s$ trên mặt phẳng, khoảng cách lăn của nó sau ts là $S = 5t + 3t^3$.

a) Tìm vận tốc sau $2s$?

b) sau bao lâu thì vận tốc đạt được $35m/s$?

6. (a) Thể tích của khối cầu được tính bởi công thức $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ với r tính theo micromet($1\mu m = 10^{-6}m$). Tìm tỉ lệ thay đổi của V theo r khi r thay đổi từ: i) 5 tới $8\mu m$. ii) 5 đến $6\mu m$. iii) 5 đến $5,1\mu m$.

b)Tìm tỉ lệ thay đổi tức thời của V theo r tại thời điểm $r = 5\mu m$. c) Chỉ ra rằng tỉ lệ thay đổi của thể tích quả cầu so với bán kính bằng diện tích bề mặt của nó. Sử dụng phương pháp hình học giải thích.

7. Một cái bồn chứa $500l$ nước, nước chảy ra từ đáy bồn trong 40 phút, theo quy tắc Torricelli cho ta công thức tính thể tích của nước còn lại trong bồn sau t là $V = 5000(1 - \frac{t}{40})^2$, $0 \leq t \leq 40$.

Tìm tỉ lệ tại thời điểm nước chảy khỏi bồn sau a) t phút, b) 10 phút, c)20 phút, d) 40 phút . Tại thời điểm nào thì dòng nước chảy với tốc độ nhanh nhất, chậm nhất.

2.2.2 Quan hệ giữa các đại lượng biến thiên

Ví dụ 2.2.7. không khí được bơm vào trong một quả cầu thể tích của nó tăng lên tốc độ 100 cm3/s. Hỏi bán kính của quả cầu tăng lên bao nhiêu khi đường kính là $50cm$?

Giải: Ta bắt đầu nhận dạng hai đại lượng:

Đại lượng đã biết: Tốc độ tăng cuả thể tích không khí $l100cm3/s$ và chưa biết là: tốc độ tăng của bán kính khi đường kính là $50cm$.

Để biểu thị những đại lượng toán học này, ta đưa ra các kí hiệu sau: Đặt V là thể tích của quả cầu và r là bán kính.

Chìa khoá giải quyết bài toán tốc độ thay đổi chính là đạo hàm. Trong bài toán này,thể tích và bán kính đều là những hàm theo thời gian. Tốc độ tăng thể tích cụ thể theo thời gian là đạo hàm dV/dt, và tốc độ tăng của bán kính là dr/dt. Ta phát biểu lại đại lượng đã biết và chưa biết như sau: Biết: $\frac{dV}{dt} = 100\,cm^3/s$.
Chưa biết: $\frac{dr}{dt} \quad khi \quad r = 25\,cm$. Để kết nối dV/dt và dr/dt. Sự liên quan giữa V và r đực cho bởi công thức thể tích của khối cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3.$$

Để sử dụng thông tin đã biết, ta đạo hàm hai vế của phương trình theo t. Để đạo hàm vế phải , ta sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{dr}{dt} = 4\pi\, r^2 \frac{dr}{dt}$$

Nếu ta cho $r = 25$ và $dV/dt = 100$ trong phương trình này , ta được

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}.$$

Bán kính quả cầu tăng lên với tốc độ $1/(25\pi)$ cm/s.

Ví dụ 2.2.8. Một cái thang dài 5m đặt dựa vào tường. Nếu chân thang dịch chuyển ra xa tường với tốc độ $1m/s$, hỏi phần trên của thang trượt xuống dưới tường như thế nào khi chân thang dịch xa cách tường 3m?
Giải: Giả sử x met là khoảng cách từ chân thang đến bức tường và y met là khoảng cách từ đầu thang đến mặt đất. Chú ý rằng x và y là hai hàm theo t (thời gian đo bằng giây).

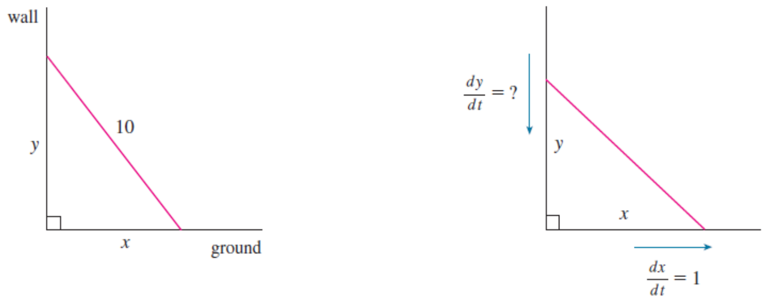
Biết $dx/dt = 1m/s$ và câu hỏi đặt ra là tìm dy/dt khi $x = 3m$ (xem Hình 2.2.3). Trong bài toán này, quan hệ giữa x và y được cho bởi định lí Pytago:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Đạo hàm hai vế theo t sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Và giải phương trình này ta được:
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$
Khi $x = 3$, định lí pytago ta có $y = 4$, thế các giá trị này và $dx/dt = 1$, ta có
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(1) = -\frac{3}{4}m/s.$$
Như vậy dy/dt là âm điều này có nghĩa là khoảng cách từ đầu thang đến mặt đất là giảm với tốc độ $\frac{3}{4}m/s$. Nói cách khác, đầu thang trượt xuống mặt đất dọc theo tường với tốc độ $\frac{3}{4}m/s$.



Hình 2.2.3

Ví dụ 2.2.9. Xe A đang đi về phía tây với vận tốc là $90km/h$ và xe B đi về hướng bắc với vận tốc $100km/h$. Cả hai xe đều đi về điiểm giao nhau của hai con đường. Tính vận tốc gần đúng của mỗi xe khi xe A cách 60 m và xe B cách $80m$ từ điểm giao nhau?

Giải: Ta vẽ Hình 2.2.4, C là điểm giao nhau của các đường. Tại thời điiểm t, giả sử x là khoảng cách từ xe A đến C, y là khoảng cách từ xe B tới C, và z là khoảng cách giữa các xe, trong đó x, y, z được tính bằng km.

Ta có $dx/dt = -90km/h$ và $dy/dt = -100km/h$. (Đạo hàm âm vì x và y là giảm). Tìm dz/dt. Phương trình liên quan đến các đại lượng x, y, z cho bởi định lí Pytago, đạo hàm mỗi vế của phương trình theo t, ta có
$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$
Khi $x = 0.06km$ và $y = 0.08km$, theo định lí Pytago có $z = 0.1km$, vậy
$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.1}\,[0.06(-90) + 0.08(-100)] = -134\ .$$
Các xe có vận tốc gần đúng là $134km/h$.

Ví dụ 2.2.10. Một người đàn ông đi bộ dọc theo đường với vận tốc $1.5m/s$. Một cái đèn pha rọi xuống mặt đất $6m$ và rọi vào người ấy. Hỏi góc quay của đèn pha thay đổi như thế nào khi người đàn ông cách điểm đèn pha chiếu vuông góc xuống đường $8m$.

Giải: Ta vẽ Hình 2.2.5 và giả sử x là khoảng cách từ người đàn ông đến điểm đèn pha chiếu vuông góc xuống con đường. Ta giả sử θ là góc giữa tia sáng của đèn pha và đường vuông góc xuống đường.

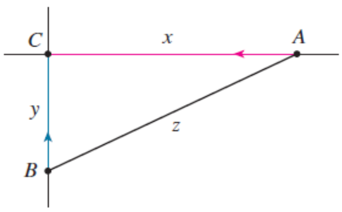
Ta có $dx/dt = 1.5m/s$ và tìm d/dt khi $x = 8$. Phương trình liên quan đến x và có thể viết từ Hình 2.2.5

$$\frac{x}{6} = \tan\theta \qquad \rightarrow \qquad x = 6\tan\theta.$$

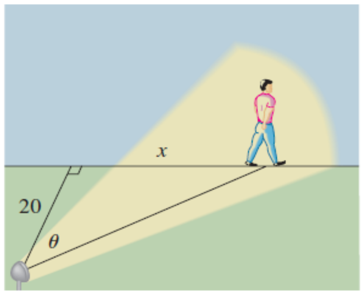
Đạo hàm hai vế theo t, ta được:

$$\frac{dx}{dt} = 6\text{sec}^2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Vậy khi $x = 8$, độ dài của tia sáng là 10, vậy và đèn pha quay với tốc độ là $0.16rad/s$.



Hình 2.2.4



Hình 2.2.3

BÀI TẬP

1. Nếu V là thể tích của hình lập phương với độ dài cạnh là x và hình lập phương giãn ra theo thời gian, tìm dV/dt theo dx/dt.

2. (a) Nếu A là diện tích của hình tròn với bán kính r và hình tròn này giãn ra theo thời gian, tìm dA/dt theo dr/dt.

(b) Giả sử dầu tràn ra từ thùng dầu và tràn ra theo dạng hình tròn. Nếu bán kính của vũng dầu tăng với tốc độ $1m/s$, hỏi diện tích của vũng dầu tăng lên bao nhiêu khi bán kính là $30m$?

3. Cạnh của hình vuông tăng lên với tốc độ là 6 cm/s. Hỏi tốc độ diện tích của hình vuông tăng như thế nào khi diện tích của nó là $16cm^2$?

4. Chiều dài của hình chữ nhật tăng với tốc đọ là $8cm/s$ và chiều rộng tăng với vận tốc là $3cm/s$. Khi chiều dài là 20 cm và chiều rộng là 10 cm, hỏi diện tích của hình chữ nhật tăng như thế nào?

5. Nếu $y = x^3 + 2x$ và $dx/dt = 5$, tìm dy/dt khi $x = 2$.

6. Nếu $x^2 + y^2 = 25$ và $dy/dt = 6$, tìm dx/dt khi $y = 4$.

7. Nếu $z^2 = x^2 + y^2, dx/dt = 2$ và $dy/dt = 3$, tìm dz/dt khi $x = 5$ và $y = 12$.

8. Một hạt di chuyển dọc theo đường cong $y = \sqrt{1 + x^3}$. Khi nó tới điểm $(2, 3)$, toạ độ y sẽ tăng lên với tốc độ là $4cm/s$. Hỏi toạ độ x sẽ thay đổi như thế nào tại thời điểm đó?

9-12.

(a) Những đại lượng nào được cho trong bài toán?

(b) Đại lượng nào chưa biết?

(c) Viết một phương trình liên quan đến các đại lượng.

(d) Hoàn thành việc gải bài toán.

9. Nếu một hòn tuyết tan ra mà diện tích bề mặt của nó giảm với tốc độ $1cm^2/pht$, tìm tốc độ của đường kính giảm như thế nào khi đường kính là $10cm$.

10. Tại buổi trưa, thuyền A cách thuyền B là $150km$ về hướng tây. Thuyền A là đi về hướng đông với vận tốc là $35km/h$ và thuyền B đi về hướng bắc $25km/h$. Hỏi khoảng cách giữa các thuyền thay đổi như thế nào vào lúc $4:00P.M$?

11. Một máy bay bay theo đường ngang với độ cao $2km$ so với mặt biển với vận tốc là $800km/h$ ngang qua trạm rada. Hỏi tốc độ khi khoảng cách từ nó đến trạm giảm như thế nào khi nó cách xa trạm $3km$.

12. Một đèn đường đặt ở trên điểm cao $5m$. Một người đàn ông cao $2m$ đi bbộ ra xa điểm với vận tốc là $1.5m/s$ dọc theo con đường. Hỏi bóng của anh ấy di chuyển như thế nào khi anh ấy cách điểm $10m$?

13. Hai xe bắt đầu xuất phát từ một điểm. Một xe đi về hướng nam với bvận tốc là $30km/h$ và xe kia đi về hướng tây với vận tốc là $72km/h$. Hỏi khoảng cách giữa hai xe tăng với tốc độ như thế nào sau hai giờ?

14. Một đèn pha trên nền chiếu sáng vào một bức tường cách 12m. Nếu một người đàn ông cao $2m$ đi bộ từ đèn pha về hướng ngôi nhà với vận tốc là $1.6m/s$. Hỏi chiều dài của bóng anh ấy trên ngôi nhà giảm như thế nào khi anh ấy cách ngôi nhà $4m$?

15. Một người đàn ông đi bộ về hướng bắc với vận tốc là $1.2m/s$ từ điểm P. Năm phút sau người phụ nữ bắt đầu đi bộ về hướng nam với vận tốc $1.6m/s$ tử điểm cách điểm P $200m$ về phía đông. Hỏi tốc độ của mỗi người đi sau 15 phút sau khi người phụ nữ đi.

2.2.3 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 2.2.11. Tìm điểm tới hạn của hàm $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

Giải: Theo quy tắc đạo hàm ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{5}x^{-2/5}(4-x) \ + \ x^{3/5}(-1) = \frac{3(4-5)}{5x^{2/5}} - x^{3/5} \\ &= \frac{3(4-x)-5x}{5x^{2/5}} \ = \frac{12-8x}{5x^{2/5}} \end{aligned}.$$

Do đó, $f'(x) = 0$ nếu $12 - 8x = 0$, suy ra $x = \frac{3}{2}$, và $f'(x)$ không tồn tại tại 0. Vậy, điểm tới hạn là $\frac{3}{2}$ và 0.

Ví dụ 2.2.12. Sử dụng phép tính để tìm chính xác gái trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x) = x - 2\sin x, \ 0 \leq \ x \leq 2\pi.$$

Giải: Hàm $f(x) = x - 2\sin x$ liên tục trên $[0, 2\pi]$. Vì $f'(x) = 1 - 2\cos x$, $f'(x) = 0$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \pi/3$ hoặc $5\pi/3$. Giá trị của f tại các điểm tới hạn là

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

$$f\left(5\pi/3\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039.$$

Giá trị của hàm f tại các điểm mút là

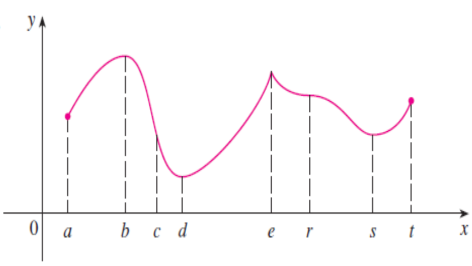
$$f(0) = 0 \qquad \text{và} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28.$$

So sánh bốn giá trị và sử dụng phương pháp khoảng đóng, ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f\left(\pi/3\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ và giá trị lớn nhất $f\left(5\pi/3\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$.

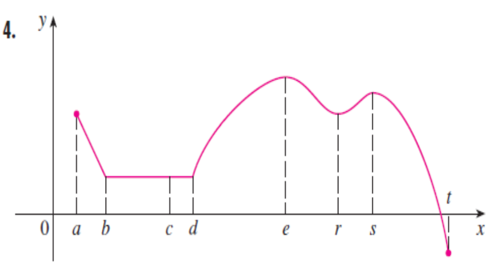
BÀI TẬP

1-2. Cho các số a, b, c, d, e, r, s và t. Dựa vào đồ thị của các hàm , hãy chỉ ra đâu là giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất, cực đại hoặc cực tiểu địa phương hoặc không là cực đại cũng không là cực tiểu.

3.



4.



3 - 16. Tìm các điểm tới hạn của hàm số

3. $f(x) = 5x^2 + 4x$.
4. $f(x) = x^3 + x^2 - x$.
5. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$.
6. $f(x) = x^3 + x^2 + x$.
7. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$.
8. $g(t) = |3t - 4|$.
9. $f(r) = \dfrac{r}{r^2+1}$.
10. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+z+1}$.
11. $F(x) = x^{4/5}(x-4)^2$.
12. $G(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$.
13. $f(\theta) = 2\cos\theta + \sin^2\theta$.
14. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$.
15. $f(x) = x\ln x$.
16. $f(x) = xe^{2x}$.

17 - 24. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm f trên khoảng.

17. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5,\ [0,3]$.
18. $f(x) = x^3 - 3x + 1.\ [0,3]$.
19. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1,\ [-2,3]$.
20. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2,\ [-1,4]$
21. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3,\ [-2,3]$.
22. $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\ [-1,2]$
23. $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x},\ [\dfrac{1}{2}, 2]$.
24. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4},\ [0,3]$.

2.2.4 Đạo hàm và hình dáng của đường cong

BÀI TẬP

1 - 8. (a) Tìm khoảng tăng hoặc giảm của hàm f.

(b) Tìm giá trị cực đại và cực tiểu của hàm f.

(c) Tìm các khoảng lõm và điểm uốn.

1. $f(x) = x^3 - 12x + 1$.
2. $f(x) = x^4 - 4x - 1$.
3. $f(x) = xe^x$.
4. $f(x) = x - 2\sin x,\ [0, 3\pi]$.
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$.
6. $f(x) = x^2e^x$.
7. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
8. $f(x) = x\ln x$.

9 - 18 .(a) Tìm các khoảng tăng hoặc giảm.

(b) Tìm giá trị cực đại và cực tiểu.

(c) Tìm khoảng lõm và điểm uốn.

9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.
10. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$
11. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$.
12. $h(x) = (x^2 - 1)^3$
13. $A(x) = x\sqrt{x+3}$.
14. $B(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x$.
15. $C(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$
16. $f(x) = \ln(1 + x^2)$.
17. $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x,\ -\pi \le x \le \pi$.
18. $f(x) = 2x + \cot x,\ 0 < x < \pi$.

19 - 26. (a) Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. (b) Tìm các khoảng tăng hoặc giảm. (c) Tìm giá trị cực đại và cực tiểu. (d) Tìm các khoảng lõm và điểm uốn. (e) Sử dụng thông tin từ (a)- (d) vẽ đồ thị của f.

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.
20. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.
21. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$
22. $f(x) = x\tan x,\ \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.
23. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.
24. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
25. $f(x) = e^{\frac{-1}{x+1}}$.
26. $f(x) = \ln(\tan^2 x)$.

2.2.5 Dạng vô định và quy tắc L'Hospital

Ví dụ 2.2.13. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Giải: Vì

$$\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad va \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

Ta có thể dùng quy tắc L'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

Ví dụ 2.2.14. Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad va \quad \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

vậy quy tắc Lopital ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}.$$

Vì $e^x \to \infty\, va\ 2x \to \infty\ khi\ x \to \infty$, giới hạn ở vế phải cũng vô định, nhưng dùng quy tắc Lopital lần thứ hai

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \infty.$$

Ví dụ 2.2.15. Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Giải: Vì $\ln x \to \infty\ \ va\ \ \sqrt[3]{x} \to \infty\ \ khi\ x\to\infty$, áp dụng quy tắc L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}.$$

Ví dụ 2.2.16. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$.

Giải: Chú ý rằng cả $\tan x - x \to 0\ \ va\ \ x^3 \to 0\ khi\ x \to 0$, ta dùng quy tắc L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{sec^2 - 1}{3x^2}.$$

Vì giới hạn ở vế phải vẫn có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Sử dụng quy tắc Lopital lần nữa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} \sec^2 = 1$, ta tính đơn giản bằng cách viết:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \sec^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}.$$

Ta có thể tính giới hạn cuối bằng cách sử dụng quy tắc L'Hopital lần thứ 3 hoặc bằng cách viết $\tan x$ bằng

$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

và dùng kiến thức giới hạn lượng giác. Kết hợp tất cả các bước, ta được

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2.2.17. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Giải: Giới hạn đã cho có dạng vô định vì , khi $x \to 0^+$, nhân tử đầu x tiến đến 0 trong khi nhân tử thứ hai $\ln x$ tiến đến $-\infty$. Viết $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$, ta có $\frac{1}{x} \to \infty\ khi\ x \to 0^+$, do vậy quy tắc L'Hopital cho ta

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Ví dụ 2.2.18. Tính $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sec x - \tan\ x)$.

Giải: Chú ý rằng $\sec x \to \infty$ và $\tan\ x \to \infty$ khi $x \to \frac{\pi}{2}$, do vậy giới hạn có dạng vô định. Dùng mẫu số chung

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sec x - \tan\ x) = \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{1}{\cos\ x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Chú ý rằng dùng quy tắc Lopital là hợp lý bởi vì

$$1 - \sin x \to 0\ va\ \cos x \to 0\ k\text{hi}\ \ \text{x} \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-.$$

Ví dụ 2.2.19. Tính

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\text{c otx}}$$

. Giải: Trước hết chú ý rằng

$$x \to 0^+$$

, ta có

$$1 + \sin x \to 1$$

và

$$\cot \to \infty$$

, vậy giới hạn đã cho là vô định. Đặt $y = (1 + \sin 4x)^{\mathrm{c\,otx}}$, thì $\ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\cot x}] = \cot x(\ln 1 + \sin 4x)$.

Ta tính giới hạn của $\ln y$, nhưng ta cần tính giới hạn của y. Để tính ta dùng cách $y = e^{\ln y}$

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4.$$

Ví dụ 2.2.20. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Giải: Chú ý rằng giới hạn này có dạng vô định vì $0^x = 0$ với bất kỳ $x > 0$ nhưng $x^0 = 1$ với bất kỳ $x \neq 0$. Ta có thể làm như ở ví dụ trên hoặc viết hàm dưới dạng mũ cơ số e.

$$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$$

Dùng quy tắc L'Hopital và được: $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

BÀI TẬP

1 - 36. Tìm giới hạn . Dùng quy tắc L'Hospital. Nếu có phương pháp sơ cấp khác, hãy sử dụng nó. Nếu quy tắc Lôpital không dùng được, giả thích tại sao?

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-1}{x^b-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\tan x}{\sin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin x}$.
6. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{3t}-1}{t}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{\tan qx}$.
8. $\lim\limits_{\theta\to \infty} \dfrac{1-\sin\theta}{\mathrm{ese}\theta}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$.
10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln\ln x}{x}$.
11. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{5^t-3^t}{t}$.
12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\mathrm{si\,n}\pi x}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.
14. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.
15. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\ln(1+2e^x)}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$
17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x-\ln x}{1+\mathrm{cos\pi x}}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan\,(4x)}$.
19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$.
20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{\sec x}$.
21. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$.
22. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 e^x$.
23. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x}\ln x$.
24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sec 7x\mathrm{cos3x}$.
25 $\lim\limits_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$
26. $\lim\limits_{x\to \infty} x\tan\dfrac{1}{x}$.
27. $\lim\limits_{x\to \infty} (xe^{\frac{1}{x}}-x)$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(esex - \cot x)$. 29. $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \ln x)$. 30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

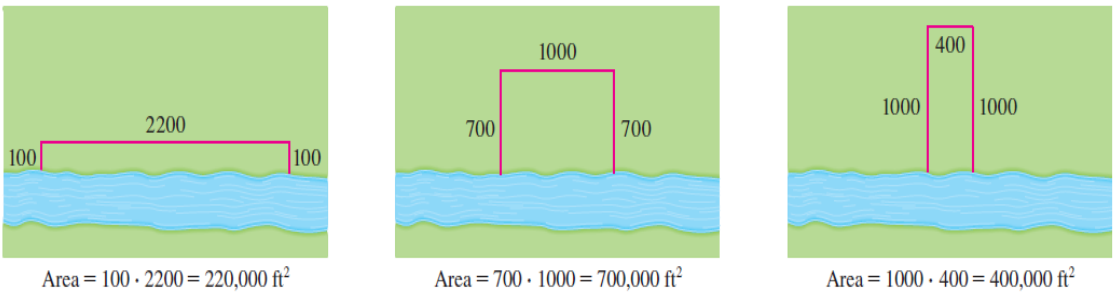
31. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$. 32. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan 2x)^x$. 33. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$.. 35. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. 36. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$.

2.2.6 Các bài toán tối ưu

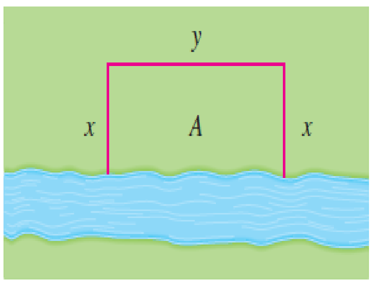
Ví dụ 2.2.21. Một người nông dân có 1200m hàng rào và cần rào bao quanh miền đất có hình dáng hình chữ nhật và biên giáp với một con sông. Anh ấy không muốn rào dọc con sông. Hỏi kích thước của việc rào miền đất như thế nào để có diện tích lớn nhất?

Giải: Để thấy được điều gì xảy ra trong bài toán này, ta xét vài trường hợp đặc biệt. Hình 2.2.12 biểu diễn 3 cách có thể bố trí hàng rào $1200m$ quanh miền đất. Ta thấy ta cố gắng làm cạn, rộng miền đất hoặc sâu, hẹp miền đất, ta nhận được sự liên quan đến diện tích nhỏ. Nó dường như có vẻ hớp lý là có một vài hình dạng có diện tích lớn nhất.



Hình 2.2.12

Ta giả sử A là diện tích hình chữ nhật cần tìm. Giả sử x và y tương ứng là chiều sâu và chiều rộng của hình chữ nhật (tính bằng mét). Thi ta biểu diễn A theo x và y. $A = xy$. Ta muốn biểu diễn A thành hàm một biến, vậy ta phải biểu diễn y theo x. Để làm điều này ta dùng thông tin đã cho là tổng độ dài của hàng rào là $1200m$.



Hình 2.2.13

Ta có $2x + y = 1200$. Từ phương trình ta có $y = 1200 - 2x$, điều này cho ta

$$A = x(12002x) = 1200x2x^2.$$

Chú ý rằng $x \geq 0$ va $x \leq 600$ (nếu không $A < 0$). Do vậy ta tìm giá trị lớn nhất của hàm đó

$$A = 1200x2x^2, 0 \leq x \leq 600.$$

Đạo hàm là $A'(x) = 1200x - 4x$, do vậy để tìm điểm tới hạn ta giải phương trình $12004x = 0$. Ta được $x = 300$. Giá trị lớn nhất của A có thể tìm thấy tại các điểm tới hạn hoặc tại điểm mút của khoảng. Vì $A(0) = 0$, $A(300) = 180000$, và $A(600) = 0$, Phương pháp khoảng đóng cho ta giá trị lớn nhất là $A(300) = 180000$.

Ví dụ 2.2.22. Một cái Can hình trụ được chế tạo để đựng 1 L dầu. Tìm kích thước sao cho chi phí nguyên liệu để chế tạo ra cái Can nhỏ nhất.

Giải: Vẽ sơ đồ trong Hình 2.2.14, trong đó r la bán kính và h là độ cao (tính bằng centimét). Để chi phí nguyên liệu bé nhất, thì tổng diện tích của hình trụ (trên, dưới, xung quanh) phải bé nhất. Từ Hình 1.1.14 ta thấy rằng xung quanh được làm từ dãi có dạng hình chữ nhật với kích thước là $2\pi r$ và h. Do đó diện tích bề mặt là: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Để tính h ta dùng diện tích đã cho là $1L$, ta đổi thành $1000cm^3$. Từ đó $\pi r^2 h = 1000$. Suy ra $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Thay vào trong biểu thức của A ta được

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Từ đó, hàm ta muốn tìm giá trị nhỏ nhất là $A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0$.

Hình 2.2.14

Để tìm những điểm tới hạn, ta đạo hàm:

$$A^{'}(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}.$$

Từ đó $A^{'}(r) = 0$ khi $\pi r^3 = 500$, chỉ có một điểm tới hạn $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

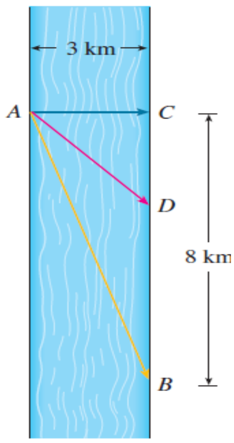
Vì miền xác định của A là $(0, \infty)$, Ta có thể thấy rằng $A(r) < 0$ với $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ và $A(r) > 0$ với $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, do vậy A giảm với mọi r tiến đến bên trái điểm tới hạn và tăng với mọi r tiến đến bên phải điểm tới hạn. Do đó, $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ phải là một giá trị nhỏ nhất.

Giá trị của h tương ứng với $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ là

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

Từ đó, để chi phí của cái canh thấp nhất, bán kính sẽ là $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}cm$ và độ cao sẽ gấp đôi bán kính, nghĩa là, bằng đường kính.

Ví dụ 2.2.23.
Một người đàn ông đi bằng thuyền từ một điểm A trên bờ một dòng sông, rộng $3km$ và muốn đến điểm B, cách điểm đối diện với A ở bờ bên kia $8km$ càng nhanh càng tốt. Anh ta có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C, sau đó chạy đến B, hoặc có thể chèo đến điểm D giữa C và B và chạy đến điểm B. Giả sử anh ta chéo 6 km/h và chạy 8km/h. Anh ta đi đến B nhanh nhất là cách nào? (giả sử rằng vận tốc nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông).



Hình 2.2.15

Giải: Ta giả sử x là khoảng cách từ C đến D, thì khoảng cách chạy là $|DB| = 8 - x$ và theo định lí Pytago cho ta khoảng cách cần chèo thuyền là $|AD| = \sqrt{x^2+9}$. Ta dùng phương trình:

$$\text{Thời gian} = \frac{\text{Khoảng cách}}{\text{Vận tốc}}.$$

Thì thời gian chèo là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ và thời gian chạy là $\frac{8-x}{8}$, do vậy tổng thời gian T là một hàm của x

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}.$$

Miền xác định của hàm này là $[0, 8]$. Chú ý rằng nếu $x = 0$ thì anh ta chèo đến điểm C và nếu $x = 8$ thì anh ta chèo trực tiếp đến B. Đạo hàm của T là

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}.$$

Vì $x \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad & \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 3\sqrt{x^2+9} \\ \Leftrightarrow \; & 16x^2 = 9(x^2+9) \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 = 81 \\ \Leftrightarrow \; & \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Chỉ có một điểm tới hạn là $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Để tìm giá trị nhỏ nhất tại điểm tới hạn này hay tại điểm mút của miền xác định $[0, 8]$, ta tính T tại tất cả những điểm này:

$$T(0) = 1.5, \; T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42.$$

Vì giá trị nhỏ nhất của T tìm được khi $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$, do đó T đạt giá trị nhỏ nhất tại đó.

Do đó, người đàn ông sẽ lên bờ tại điểm $\frac{9}{\sqrt{7}}km (\approx 3.4km)$ theo hướng xuôi dòng từ điểm bắt đầu.

BÀI TẬP

1. Tìm hai số có hiệu là 100 và tích của chúng là nhỏ nhất.
2. Tìm hai số dương có tích là 100 và tổng nhỏ nhất.
3. Tìm một số dương sao cho tổng của nó với số nghịch đảo là càng nhỏ càng tốt.
4. Tìm kích thước của một hình chữ nhật có chu vi $100m$ và diện tích càng lớn càng tốt.
5. Tìm kích thước của một hình chữ nhật có diện tích $1000m^2$ và chu vi càng nhỏ càng tốt.
6. Xét bài toán sau: Một người nông dân có $300m$ hàng roà và muốn đóng kín thành diện tích hình chữ nhật và sau đó chia làm 4 bãi rào kín với hàng rào song song với một cạnh của hình chữ nhật. Khả năng nào để tổng diện tích của 4 bãi rào lớn nhất.

(a) Vẽ vài biểu đồ minh hoạ các trường hợp, một bãi rào cạn, rộng và bãi rào sâu, hẹp. Tìm tổng diện tích của những hình thể này, trường hợp nào có diện tích lớn nhất? Nếu có, ước lượng trường hợp diện tích lớn nhất đó.
(b) Vẽ biểu đồ minh hoạ cho trường hợp tổng quát, viết lời chú thích và gán những kí hiệu trên biểu đồ.
(c) Xây dựng một biểu thức tính tổng diện tích.
(d) Dùng những giả thuyết đã cho để xây dựng một phương trình liên quan đến những biến.
(e) Dùng phần (d) để xây dựng một hàm tổng diện tích là hàm một biến.
(f) Giải xong bài toán và so sánh với câu trả lời ước lượng ở phần (a).

7. Xét bài toán sau: Một cái hộp không có nắp được tạo thành từ một miếng các tông hình vuông có cạnh là $3m$, bằng cách cắt 4 góc và gấp nối các cạnh lại. Tìm cách cắt để thể tích cái hộp lớn nhất có thể được.

(a) Vẽ một số biểu đồ để minh hoạ các trường hợp, một cái hộp thấp với đáy lớn, cái hộp cao với đáy nhỏ. Tìm thể tích tương ứng của chúng. Trường hợp nào thể thích của cái hộp lớn nhất? Nếu có thể, hãy ước lượng thể tích lớn nhất đó.
(b) Vẽ một biểu đồ minh hoạ trường hợp tổng quát. Viết lời chú thích và gán các kí hiệu trên biểu đồ.

(c) Viết công thức tính thể tích.
(d) Sử dụng giả thuyết đã cho và tìm một biểu thức liên hệ giữa các biến.
(e) Sử dụng kết quả (d) để xây dựng công thức tính thể tích là hàm một biến.
(f) Giải xong bài toán rồi so sánh với câu trả lời ước lượng ở phần (a).
8. Giả sử một tấm nhiên liệu có diện tích $1200cm^2$ dùng để làm thành một hình hộp có đáy là hình vuông và không có nắp, tìm thể tích lớn nhất có thể được của hình hộp.
9. Một hình hộp có đáy hình vuông với phần trên trống có thể tích là $32000cm^3$. Tìm kích thước của hình hộp sao cho nhiên liệu dùng bé nhất.
10. (a) Chứng minh rằng trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích bằng nhau, thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.
(b) Chứng minh rằng trong tất cả các hình vuông có chu vi bằng nhau thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.
11. Một container với phần trên trống có thể tích là 10 m3. Độ dài của đáy gấp đôi chiều rộng. Nhiên liệu dùng làm phần đáy có giá là 10 trên một mét vuông. Nhiên liệu dùng làm phần bên có giá là 6 trên một mét vuông. Tìm chi phí thấp nhất để làm container.
12. Tìm điểm trên elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho khoảng cách từ điểm đó đến điểm $(1, 0)$ lớn nhất.
13. Tìm, chính xác đến hai số thập phân, toạ độ điểm trên đường cong $y = \tan x$ gần với điểm $(1, 1)$ nhất.
14. Tìm kích thước của hình chữ nhật sao cho nó có diện tích lớn nhất nội tiếp trong một tam giác đều có cạnh là L nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm trên đáy của tam giác.
15. Tìm kích thước của hình chữ nhật sao cho diện tích lớn nhất mà nó có đáy trên trục hoành và hai đỉnh đối nhau một đỉnh nằm trên trục hoành và đỉnh kia nằm trên parabol $y = 8x^2$.
16. Một hình trụ tròn đứng nội tiếp trong một hình cầu có bán kính là r. Tìm diện tích lớn nhất có thể được của hình trụ.

2.2.7 Các ứng dụng trong kinh doanh và hoạt động kinh tế

Ví dụ 2.2.24. Một công ty thiết lập giá (theo usd) của số sản phẩm x với công thức

$$C(x) = 2600 + 2x + 0,001x^2.$$

(a) Tìm giá, biên tế, giá trung bình của 1000 sản phẩm, 2000 sản phẩm và 3000 sản phẩm. (b) Mức độ sản xuất như thế nào để giả trung bình sẽ giảm, và giá trị nhỏ nhất của giá trung bình này là bao nhiêu?

Giải:

(a) Hàm chi phí trung bình là

$$c\left(x\right) = \frac{C\left(x\right)}{x} = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x.$$

Hàm biên tế

$$C'\left(x\right) = 2 + 0.002x.$$

Chúng ta sử dụng các biểu thức trên để tìm giá trị trong các bảng sau, cho giá, giá trung bình và biên tế (theo usd, usd trên sản phẩm, làm tròn gần đồng xu nhất).

x	C(x)	c(x)	C'(x)
1000	5600.00	5.60	4.00
2000	10600.00	5.30	6.00
3000	1756.00	5.87	8.00

(b) Đối với giá trị nhỏ nhất của giá trung bình chúng ta phải có Biên tế = giá trung bình

$$C(x) = c(x) \ \Leftrightarrow \ 2 + 0.002x = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x.$$

Phương trình này suy ra $0.001x = \frac{2600}{x}$.

Như vậy $x^2 = \frac{2600}{0.001} = 2600000$ và $x = \sqrt{2600000} \approx 1612$.

Chúng ta thấy rằng cấp độ sản phẩm thực tế cho một giá trị nhỏ nhất, chú ý rằng $c''(x) = 5200/x^3 > 0$, vậy nên c quay bề lõm về phía trên trong toàn tập xác định của nó. Giá trị nhỏ nhất của giá trung bình là

$$c(1612) = \frac{2600}{1612} + 2 + 0.001\left(1612\right) = \$5.22/\text{sản phẩm}.$$

Ví dụ 2.2.25. Xác định mức độ sản lượng sao cho sẽ đạt giá trị lớn nhất về lợi nhuận với hàm chi phí và hàm nhu cầu được cho

$$C\left(x\right) = 84 + 1.26x - 0.01x^2 + 0.00007x^3 \text{ với } p(x) = 3.5 - 0.01x.$$

Giải: Hàm lợi tức là

$$R(x) = xp(x) = 3.5x - 0.01x^2$$

như vậy hàm lợi tức biên là $R'(x) = 3.5 - 0.02x$. Và hàm biên tế là

$$C'(x) = 1.26 - 0.02x + 0.00021x^2.$$

Như vậy, lợi tức biên bằng biên tế khi

$$3.5 - 0.02x = 1.26 - 0.02x + 0.0021x^2.$$

Giải ra ta được

$$x = \sqrt{\frac{2.24}{0.00021}} \approx 103.$$

Đối với việc kiểm tra giá trị lớn nhất nhận được tại đây chúng ta tính đạo hàm cấp hai

$$R''(x) = -0.02C''(x) = -0.02 + 0.00042x.$$

Như vậy, $R''(x) < C''(x)$ với mọi $x > 0$. Ta có sản lượng khoảng 103 sản phẩm sẽ cho lợi nhuận lớn nhất.

Ví dụ 2.2.26. Một quầy tạp hoá bán được 200 đèn DVD trong một tuần với giá 350USD mỗi chiếc. Một siêu thị điều tra cho biết mỗi lần trả hạ giá 10USD để mua, số sản phẩm bán được sẽ tăng 20 sản phẩm trong một tuần. Tìm hàm nhu cầu và hàm lợi tức. Cần phải hạ một lượng giá bao nhiêu để cửa hàng thu được lợi tức lớn nhất?

Giải: Nếu x là số đèn DVD bán được trong mỗi tuần, khi đó mỗi tuần lượng đèn bán được tăng $x - 200$. Để lượng bán được tăng 20 sản phẩm thì giá phải giảm là 10USD. Như vậy thêm một sản phẩm bán được thì số tiền thu về sẽ giảm là 1/20.10 và hàm nhu cầu nhận được là

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x.$$

Hàm lợi tức là

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2.$$

Từ $R'(x) = 450 - x$ ta nhận được $R'(x) = 0$ khi $x = 450$. Giá trị x này cho một giá trị lớn nhất, có thể kiểm tra bằng đạo hàm cấp hai (đơn giản đồ thị của $R(x)$ là một parabola quay bề lõm về phía dưới). Giá tương ứng là

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225.$$

Và số tiền hạ là $350 - 225 = 125$. Như vậy để đạt được lợi tức cực đại quầy tạp hóa phải hạ giá 125USD.

BÀI TẬP

1 - 2. Với mỗi hàm chi phí (tính theo đô la), tìm (a) giá, giá trung bình, và biên tế của sản lượng 1000 sản phẩm; (b) sản lượng để giá trung bình đạt cực đại và (c) sản lượng để giá trung bình đạt giá trị nhỏ nhất.

1. $C(x) = 1600 + 200x + 4x^{3/2.}$ 2. $C(x) = 10000 + 340x - 0.3x^2 + 0.0001x^3$.

3 - 4. Cho một hàm chi phí.
(a) Tìm hàm chi phí trung bình và hàm biên tế.
(b) Sử dụng đồ thị của các hàm trong phần (a) thiết lập sản lượng sao cho giá trung bình đạt cực đại.
(c) Sử dụng tính toán tìm giá trị nhỏ nhất của giá trung bình.
(d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biên tế.

3. $C(x) = 370 + 5x - 0.04x^2 + 0.0003x^3$. 4. $C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$.

5 - 6. Với hàm chi phí và hàm nhu cầu đã cho. Tìm sản lượng sao cho lợi nhuận lớn nhất.
5. $C(x) = 680 + 4x + 0.01x^2$; $p(x) = 12x/500$.
6. $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0.004x^3$; $p(x) = 17007x$.
7 - 8. Tìm sản lượng tại thời điểm hàm biên tế bắt đầu tăng.
7. $C(x) = 0.0008x^3 - 0.72x^2 + 325.3x + 78000$.
8. $C(x) = 0.001x^3 - 0.84x^2 + 416x + 55000$.