ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI

(a). Trong tích phân một lớp, chúng ta có công thức đổi biến sau đây:

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

trong đó $x = g(u)$ và $a = g(c), b = g(d)$.

Một cách viết khác của công thức [1] là:

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

(b). Đối với tích phân 2 lớp:

Chúng ta vẫn có thể đổi biến khi tính tích phân, chẳng hạn như việc đổi sang tọa độ cực mà chúng ta đã làm từ trước đây. Cụ thể, nếu các biến mới r và θ quan hệ với các biến cũ x và y theo các phương trình:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Khi ấy ta có:

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dA = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Tổng quát hơn, chúng ta xét một phép đổi biến T từ mặt phẳng uv sang mặt phẳng xy, được viết dưới dạng: $T(u,v) = (x, y)$, trong đó x và y có quan hệ với u và v theo các phương trình:

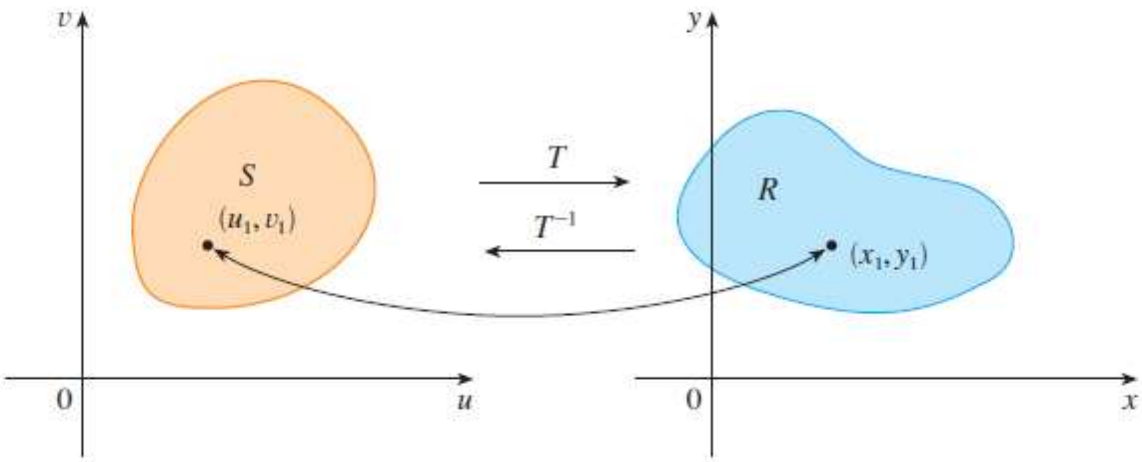
$$x = g(u,v) \text{ và } y = h(u,v)$$

Nhiều khi chúng ta còn viết dưới dạng: $x = x(u,v)$ và $y = y(u,v)$.

Chúng ta giả thiết T là phép đổi biến thuộc lớp C^1, nghĩa là các hàm $g(u,v)$ và $h(u,v)$ là các hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục. Nếu T là phép đổi biến 1-1 thì chúng ta sẽ tìm được một phép đổi biến T^{-1} từ mặt phẳng xy sang mặt phẳng uv và khi đó mối quan hệ giữa u và v với x và y được tính bằng cách giải các phương trình trên, ta có:

$$u = G(x, y) \text{ và } v = H(x, y)$$

Mô phỏng các phép đổi biến trên bằng hình vẽ sau đây:



Ví dụ 1: Một phép biến đổi được xác định bởi phương trình

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Tìm ảnh của hình vuông $S = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$

Giải Phép biến đổi ánh xạ đường giới hạn của *S* vào đường giới hạn của ảnh , nên chúng ta bắt đầu bằng việc tìm ảnh của cạnh *S*. Cạnh thứ nhất S_1 được cho bởi $v = 0 \left(0 \le u \le 1\right)$ (hình 2). Từ phương trình đã cho chúng ta có $x = u^2$, $y = 0$ nên $0 \le x \le 1$. Vậy S_1 được ánh xạ vào một đoạn đường thẳng từ $(0, 0)$ đến $(1, 0)$ trong mặt phẳng *xy*. Cạnh thứ hai S_2 là $u = 1$ $(0 \le v \le 1)$ và đặt $u = 1$ cho các phương trình đã cho chúng ta có

$$x = 1 - v^2 \qquad\qquad y = 2v$$

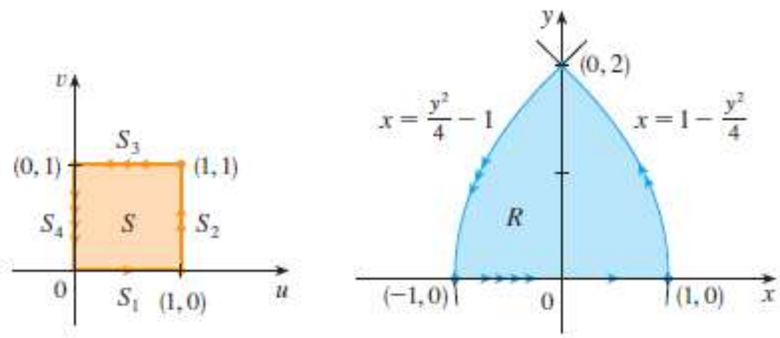
Khử *v* ta được

$$(4) \qquad x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad\qquad 0 \le x \le 1$$

Là phương trình một phần của parabola. Tương tự S_3 được cho bởi $v = 1\left(0 \le u \le 1\right)$. S_3 có ảnh là một đường cong parabol

$$(5) \qquad x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad\qquad -1 \le x \le 0$$

Cuối cùng S_4 được cho bởi $u = 0\left(0 \le v \le 1\right)$ có ảnh là $x = -v^2, y = 0$ do đó $-1 \le x \le 0$ (Chú ý khi chúng ta di chuyển xung quanh hình vuông theo chiều kim đồng hồ , chúng ta cũng di chuyển xung quanh miền parabol theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của *S* là miền *R* (xem hình 2) được giới hạn bởi trục *x* và các parabol được cho bởi các phương trình (4) và (5)



**** Định nghĩa:***

Jacobian của một phép đổi biến T được cho bởi $x = g(u,v)$ và $y = h(u,v)$ là:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}$$

**** Đổi biến trong tích phân 2 lớp***:

Giả sử T là một phép đổi biến thuộc lớp C^1 sao cho Jacobian của nó khác 0, T biến miền S trong mặt phẳng uv thành miền R trong mặt phẳng xy. Nếu f là một hàm liên tục và R, S là các miền Dạng I hoặc Dạng II thì khi ấy ta có:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Dùng công thức trên, chúng ta sẽ kiểm tra được tính đúng đắn của công thức đổi biến sang tọa độ cực mà chúng ta đã biết.

(c). Đối với tích phân 3 lớp:

Giả sử T là một phép đổi biến thuộc lớp C^1 xác định bởi các phương trình $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$ và $z = k(u,v,w)$. Ngoài ra, T sẽ biến hình khối S trong không gian uvw thành hình khối R trong không gian xyz. Khi ấy Jacobian của T là:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Mặt khác ta còn có:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

Dùng công thức trên, bạn sẽ kiểm chứng được tính đúng đắn của các công thức đổi biến sang tọa độ trụ và tọa độ cầu.

* **Ví dụ 2 :** Sử dụng phép đổi biến $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ để tính tích phân $\iint_R y dA$, trong đó R là miền được giới hạn bởi trục x và các parabol $y^2 = 4 - 4x$ và $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$

Giải : Miền R được biểu diễn ở hình 2 trong ví dụ 1 chúng ta đã tìm được $T(S) = R$ trong đó S là hình vuông $[0,1] \times [0,1]$. Nguyên nhân chúng ta lựa chọn phương án đổi biến trong phép tính tích phân đó là miền S sẽ đơn giản hơn rất nhiều so với miền R. Trước hết chúng ta đi tính giá trị *Jacobian*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Vậy , áp dụng định lý ta được

$$\iint_R y dA = \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv) 4(u^2 + v^2) du dv$$

$$= 8\int_0^1\int_0^1 \left(u^3v + uv^3\right)dudv = 8\int_0^1 \left[\tfrac{1}{4}u^4v + \tfrac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$
$$= \int_0^1 \left(2v + 4v^3\right)dv = \left[v^2 + v^4\right]_0^1 = 2$$

Chú ý : Ví dụ 2 không phải là một bài toán khó để tính toán chúng ta đã đưa ra một phương pháp đổi biến phù hợp. Nếu chúng ta không đưa vào phép biến đổi *T* thì bước thứ nhất sẽ phải suy nghĩ một phép đổi biến thích hợp. Nếu $f(x, y)$ là hàm khó lấy tích phân thì dạng của $f(x, y)$ có thể gợi ý cho ta một phép biến đổi. Nếu miền của phép lấy tích phân *R* là một miền phức tạp thì phép biến đổi nên chọn sao cho tương đương với miền *S* trong mặt phẳng *uv* và có thể mô tả bằng hình vẽ một cách thuận tiện

Ví dụ 3 : Tính tích phân $\iint\limits_R e^{(x+y)/(x-y)}dA$, trong đó *R* miền hình thang có các tọa độ $(1,0),(2,0),(0,-2)$ và $(0,-1)$

Giải : Bài toán rất khó giải khi tính trực tiếp tích phân $\iint\limits_R e^{(x+y)/(x-y)}dA$, chúng ta sử dụng phép đổi biến bằng cách đặt

$$u = x + y \qquad\qquad v = x - y$$

Các phương trình này xác định một phép biến đổi T^{-1} từ mặt phẳng *xy* sang mặt phẳng *uv*. Định lý phát biểu về một phép biến đổi *T* từ mặt phẳng *uv* sang mặt phẳng *xy*. Giải các phương trình 10 đối với *xy* ta được

$$x = \tfrac{1}{2}(u+v) \qquad\qquad y = \tfrac{1}{2}(u-v)$$

Giá trị *Jacobian* của *T* là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

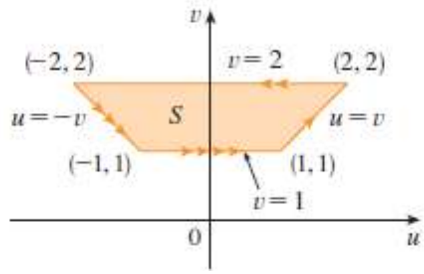
Để tìm miền *S* trong mặt phẳng *uv* tương ứng với *R* , chúng ta chú ý rằng các mặt của *R* nằm trên các đường thẳng

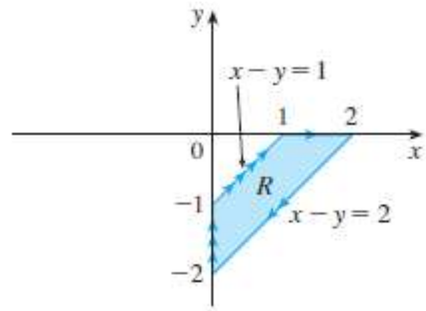
$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

Và từ một trong các phương trình 10 hoặc 11 ta có ảnh của các đường thẳng trong mặt phẳng *uv* là

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$$

Như vậy , miền S là miền hình thang với các tọa độ đỉnh $(1,1),(2,2),(-2,2)$ và $(-1,1)$ xem hình





$$S = \left\{ (u,v) \mid 1 \le v \le 2, -v \le u \le v \right\}$$

Định lý cho ta kết quả

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{dudv}$$

$$= \int_1^2 \int_{-\mathrm{v}}^{\mathrm{v}} \mathrm{e}^{u/v} \left(\tfrac{1}{2}\right) \mathrm{dudv} = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(e - e^{-1}\right) v dv = \frac{3}{4}\left(e - e^{-1}\right)$$