

BÀI TẬP ÔN TẬP TOÁN C2

1) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Hãy tính biểu thức: $(AB)^t - 2A^t + 3B^t$

2) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$. Hãy tính biểu thức: $A^2 - 4A^{-1} + 5A^t$

3) Cho ma trận $f(x) = x^2 - 3x + 4$ và $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$. Hãy tìm $f(A)$.

3) Cho phương trình $AX = B$, trong đó $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

- a) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A .
- b) Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình trên.

4) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận X biết: $2X + A^t B - 3B = 0$.

5) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

6) Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 13y + 5z = 6 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 5y + 3z = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$$e) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad h) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

7) Giải hệ phương trình sau theo a.

$$a) \begin{cases} 3x - 3y + z = 1 \\ 4x - 3y + z = 2 \\ 3x - 4y + z = a \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \\ x + 4y + 3z = a \end{cases}$$

8) Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ 3x - 4y + mz = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 + mx_4 = 1 \end{cases}$$

9) Hỏi họ vectơ sau có sinh ra R^3 không?

$$B = \{u_1 = (-1, 2, 0); u_2 = (2, 0, 1); u_3 = (3, 1, -2)\}$$

10) Hỏi họ vectơ nào sau đây là độc lập tuyến tính :

a) $(1, 0, 2, 0)$, $(0, -1, 0, 3)$, $(0, 2, 1, 4)$ trong R^4 ?

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ trong $M_{2 \times 2}$?

11) Trong không gian R^2 cho hai cơ sở $U = \{u_1, u_2\}$, $V = \{v_1, v_2\}$.

$$u_1 = (-1, 3); u_2 = (-3, 1); v_1 = (3, -2); v_2 = (-2, 3)$$

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U .

b) Cho $[x]_V = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ tìm trận tọa độ $[x]_U$ và vectơ $x \in R^2$.

12) a) Tìm m để họ sau là một cơ sở của không gian R^3

$$H = \{(1, m, 1), (-1, 0, m), (1, 1, 1)\} .$$

$$S = \{(m, 1, 2), (2, 3, m), (1, 1, -1)\}$$

$$\text{Cho } m=1, \text{ và } [x]_H = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} . \text{ Tìm vectơ } x \in R^3 .$$

b) Hỏi họ hai ma trận sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian $M_{2 \times 2}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

13) Trong R^3 cho hai họ vectơ sau:

$$B = \{u_1 = (-1, 3, 0); u_2 = (-2, 0, -1); u_3 = (4, 1, 2)\}$$

$$B' = \{v_1 = (-1, -2, 0); v_2 = (3, 2, 0); v_3 = (0, 1, -2)\}$$

a) Chứng minh B, B' là hai cơ sở trong R^3 .

b) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B. Cho $[x]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, hãy tìm $[x]_B$ và vectơ

$$x \in R^3$$

14) Trong không gian R^3 cho họ vectơ $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ trong đó

$$u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (-3, 2, 1); u_3 = (2, -1, 3);$$

a) Chứng minh B là một cơ sở của R^3 .

b) Tìm ma trận tọa độ của vectơ $x = (-4, 5, 1)$ đối với cơ sở B.

c) Cho $[x]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Hãy tìm vectơ $x \in R^3$.

15) Tính tổng chuỗi sau (nếu có):

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n-1}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{6^{n-1}}$$

$$c) 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - (-3)^{n-1}}{4^{n-1}}$$

$$e) 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} - \frac{5}{4^3} + \dots$$

16) Viết số sau thành số hữu tỉ

$$a) 4.\overline{13} = 4.131313\dots$$

$$b) 3.\overline{15} = 3.151515\dots$$

17) Xét sự hội tụ hay phân kì của các chuỗi số sau:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 2^n}{n!}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4n^4 - 3n + 1}{n^3 + 2n} \right)^{2n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! 3^n}{(2n)!}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{5^{n-1}}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4n^2 - n + 1}{5n^2 + n} \right)^{2n}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2.4.6\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n+1)}$$

18) Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi sau:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot (n+1)}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n+2}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-2)^n$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{2n}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^3 + 1}$$

h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} (x-3)^n$$