Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi có dấu bất kỳ

Định nghĩa:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi dương* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

hội tụ.

Ví dụ:

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$ *là chuỗi hội tụ tuyệt đối vì* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}\right| =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ *là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.*

Ví dụ:

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *hội tụ theo tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu nhưng không hội tụ tuyệt đối.*

Định lý:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.*

Tiêu chuẩn D'alembert (Tiêu chuẩn tỉ số)

Cho chuỗi bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

i) Nếu $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = L < 1$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

ii) Nếu $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = L > 1$ *hoặc* $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \infty$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

iii) Nếu $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = L = 1$ *thì tiêu chuẩn tỉ số không đem lại kết quả cuối cùng.*

Nghĩa là không có kết luận gì về tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Ví dụ:

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Giải.

a) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 3^n}{3^{n+1} n^3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Do đó chuỗi a) hội tụ.

b) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Do đó chuỗi b) phân kỳ.

Tiêu chuẩn Cauchy (Tiêu chuẩn căn thức)

Cho chuỗi bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *có* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L.$

i) Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

ii) Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ *hoặc* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

iii) Nếu $L = 1$ *thì không có kết luận gì về* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ví dụ:

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^n.$$

$$c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Giải:

a) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 > 1.$$

Do đó chuỗi a) phân kỳ.

b) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3} = \frac{1}{2} < 1.$$

Do đó chuỗi b) hội tụ.

c) *chuỗi phân kỳ vì* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0$