Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục tiêu

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục tiêu

- Các mô hình phương trình vi phân thường gặp.

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục tiêu

- Các mô hình phương trình vi phân thường gặp.
- Khái niệm phương trình vi phân và các khái niệm đi cùng.

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục tiêu

- Các mô hình phương trình vi phân thường gặp.
- Khái niệm phương trình vi phân và các khái niệm đi cùng.
- Khái niệm trường có hướng và ứng dụng của trường có hướng vào phương pháp Euler.

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục tiêu

- Các mô hình phương trình vi phân thường gặp.
- Khái niệm phương trình vi phân và các khái niệm đi cùng.
- Khái niệm trường có hướng và ứng dụng của trường có hướng vào phương pháp Euler.
- Khái niệm phương trình vi phân tách biến và phương pháp giải.

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục tiêu

- Các mô hình phương trình vi phân thường gặp.
- Khái niệm phương trình vi phân và các khái niệm đi cùng.
- Khái niệm trường có hướng và ứng dụng của trường có hướng vào phương pháp Euler.
- Khái niệm phương trình vi phân tách biến và phương pháp giải.
- Một số ứng dụng của phương trình tách biến trong thực tế và việc giải các mô hình phương trình vi phân.

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1.1 Mô hình sự gia tăng dân số.

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1.1 Mô hình sự gia tăng dân số.

+) t là thời gian (biến độc lập),

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1.1 Mô hình sự gia tăng dân số.

+) t là thời gian (biến độc lập),

+) P là số lượng cá thể của khu dân cư (biến phụ thuộc).

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1.1 Mô hình sự gia tăng dân số.

+) t là thời gian (biến độc lập),

+) P là số lượng cá thể của khu dân cư (biến phụ thuộc).

Tỷ lệ phát triển của dân số là đạo hàm dP/dt. Với giả định sự phát triển dân số tỷ lệ với số dân được cho bằng phương trình

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1.1 Mô hình sự gia tăng dân số.

+) t là thời gian (biến độc lập),

+) P là số lượng cá thể của khu dân cư (biến phụ thuộc).

Tỷ lệ phát triển của dân số là đạo hàm dP/dt. Với giả định sự phát triển dân số tỷ lệ với số dân được cho bằng phương trình

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{1.1}$$

với k là hằng số tỷ lệ.

1 Mô hình các phương trình vi phân.

1.1 Mô hình sự gia tăng dân số.

+) t là thời gian (biến độc lập),

+) P là số lượng cá thể của khu dân cư (biến phụ thuộc).

Tỷ lệ phát triển của dân số là đạo hàm dP/dt. Với giả định sự phát triển dân số tỷ lệ với số dân được cho bằng phương trình

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{1.1}$$

với k là hằng số tỷ lệ.

Phương trình (1.1) là mô hình thứ nhất của chúng ta đối với sự gia tăng dân số.

Rõ ràng rằng, nếu chúng ta cho $P(t) = Ce^{kt}$ thì

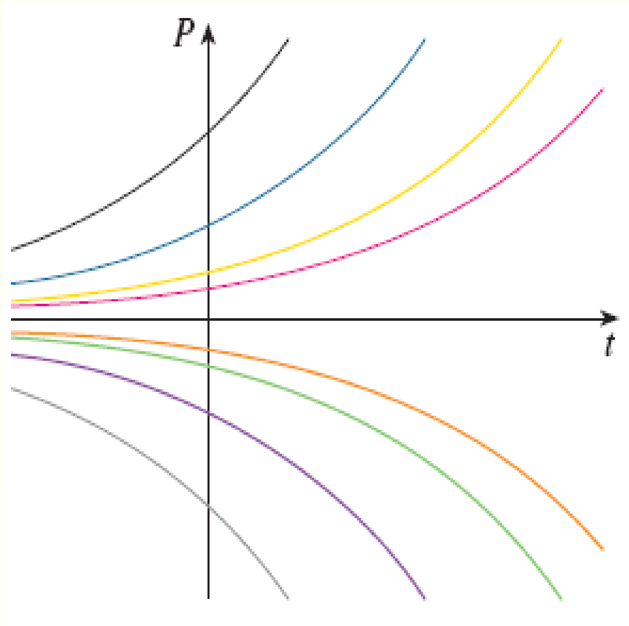
$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t).$$

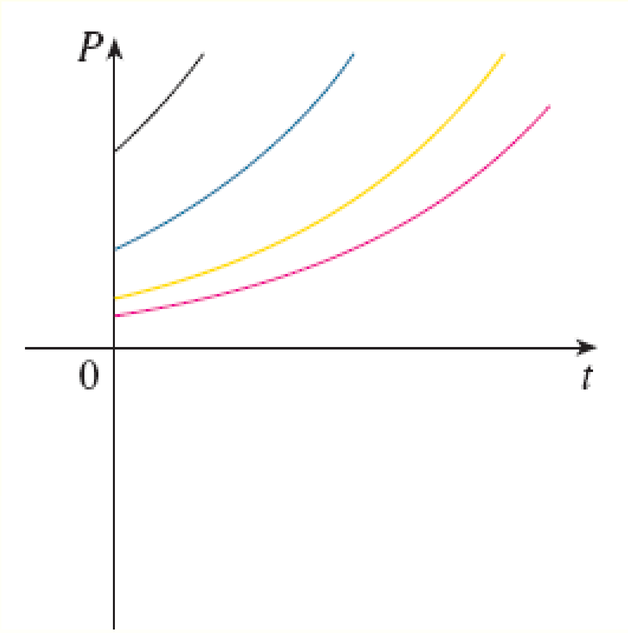
Như vậy, mọi hàm e-mũ có dạng trên là nghiệm của phương trình (1.1).

Rõ ràng rằng, nếu chúng ta cho $P(t) = Ce^{kt}$ thì

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t).$$

Như vậy, mọi hàm e-mũ có dạng trên là nghiệm của phương trình (1.1).





Nếu K là khả năng chứa đựng của dân cư thì số lượng cá thể phải đồng thời thỏa mãn:

Nếu K là khả năng chứa đựng của dân cư thì số lượng cá thể phải đồng thời thỏa mãn:

$+ \frac{dP}{dt} \approx kP(t)$ nếu P nhỏ (Ban đầu, tốc độ phát triển tỷ lệ với P.)

Nếu K là khả năng chứa đựng của dân cư thì số lượng cá thể phải đồng thời thỏa mãn:

+ $\frac{dP}{dt} \approx kP(t)$ nếu P nhỏ (Ban đầu, tốc độ phát triển tỷ lệ với P.)

+ $\frac{dP}{dt} < 0$ nếu $P(t) > K$ (P giảm nếu nó vượt quá K).

Nếu K là khả năng chứa đựng của dân cư thì số lượng cá thể phải đồng thời thỏa mãn:

+ $\frac{dP}{dt} \approx kP(t)$ nếu P nhỏ (Ban đầu, tốc độ phát triển tỷ lệ với P.)

+ $\frac{dP}{dt} < 0$ nếu $P(t) > K$ (P giảm nếu nó vượt quá K).

Mô hình đơn giản kết hợp chặt chẽ cả hai giả định được cho bởi phương trình

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{1.2}$$

Nếu K là khả năng chứa đựng của dân cư thì số lượng cá thể phải đồng thời thỏa mãn:

+ $\frac{dP}{dt} \approx kP(t)$ nếu P nhỏ (Ban đầu, tốc độ phát triển tỷ lệ với P.)

+ $\frac{dP}{dt} < 0$ nếu $P(t) > K$ (P giảm nếu nó vượt quá K).

Mô hình đơn giản kết hợp chặt chẽ cả hai giả định được cho bởi phương trình

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{1.2}$$

Phương trình (1.2) được gọi là phương trình vi phân Logistic, nó được đưa ra, vào những năm 1840, bởi nhà toán học Dutch và nhà sinh vật học Pierre-Francois Verhulst.

1.2 Mô hình chuyển động của con lắc lò xo.

1.2 Mô hình chuyển động của con lắc lò xo.

Nếu lò xo được kéo ra (hoặc nén lại) x đơn vị so với độ dài cân bằng thì nó tác dụng một lực tỷ lệ với x

1.2 Mô hình chuyển động của con lắc lò xo.

Nếu lò xo được kéo ra (hoặc nén lại) x đơn vị so với độ dài cân bằng thì nó tác dụng một lực tỷ lệ với x

$$\text{lực đàn hồi } = -kx$$

ở đây k là mộ hằng số dương (được gọi là hệ số đàn hồi lò xo).

1.2 Mô hình chuyển động của con lắc lò xo.

Nếu lò xo được kéo ra (hoặc nén lại) x đơn vị so với độ dài cân bằng thì nó tác dụng một lực tỷ lệ với x

$$\text{lực đàn hồi } = -kx$$

ở đây k là mộ hằng số dương (được gọi là hệ số đàn hồi lò xo).

Khi đó theo định luật Newton II (lực bằng khối lượng nhân với gia tốc), ta có

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{1.3}$$

1.2 Mô hình chuyển động của con lắc lò xo.

Nếu lò xo được kéo ra (hoặc nén lại) x đơn vị so với độ dài cân bằng thì nó tác dụng một lực tỷ lệ với x

$$\text{lực đàn hồi } = -kx$$

ở đây k là mộ hằng số dương (được gọi là hệ số đàn hồi lò xo).

Khi đó theo định luật Newton II (lực bằng khối lượng nhân với gia tốc), ta có

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{1.3}$$

Chúng ta có thể viết phương trình (1.3) dưới dạng

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$$

1.3 Phương trình vi phân.

1.3 Phương trình vi phân.

Trong trường hợp tổng quát, một phương trình vi phân là một phương trình chứa một hàm chưa biết và một hoặc nhiều các đạo hàm của nó.

1.3 Phương trình vi phân.

Trong trường hợp tổng quát, một phương trình vi phân là một phương trình chứa một hàm chưa biết và một hoặc nhiều các đạo hàm của nó.

Cấp của phương trình vi phân là cấp của đạo hàm cao nhất xuất hiện trong phương trình.

1.3 Phương trình vi phân.

Trong trường hợp tổng quát, một phương trình vi phân là một phương trình chứa một hàm chưa biết và một hoặc nhiều các đạo hàm của nó.

Cấp của phương trình vi phân là cấp của đạo hàm cao nhất xuất hiện trong phương trình.

Một hàm f được gọi là một nghiệm của một phương trình vi phân với biến độc lập x nếu ta có mệnh đề đúng khi thế $y = f(x)$ và các đạo hàm của nó vào phương trình. Thường thi nghiệm của một phương trình vi phân là một họ hàm.

1.3 Phương trình vi phân.

Trong trường hợp tổng quát, một phương trình vi phân là một phương trình chứa một hàm chưa biết và một hoặc nhiều các đạo hàm của nó.

Cấp của phương trình vi phân là cấp của đạo hàm cao nhất xuất hiện trong phương trình.

Một hàm f được gọi là một nghiệm của một phương trình vi phân với biến độc lập x nếu ta có mệnh đề đúng khi thế $y = f(x)$ và các đạo hàm của nó vào phương trình. Thường thi nghiệm của một phương trình vi phân là một họ hàm.

Một phương trình vi phân thỏa mãn một điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ được gọi là một bài toán giá trị ban đầu.

Ví dụ:

Ví dụ:

(a) Phương Logistic

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

$P = P(t)$ là ẩn hàm, t là biến độc lập, k, K là các hằng số. Phương trình Logistic chứa cấp đạo hàm cao nhất là cấp 1 nên nó là là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ:

(a) Phương Logistic

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

$P = P(t)$ là ẩn hàm, t là biến độc lập, k, K là các hằng số. Phương trình Logistic chứa cấp đạo hàm cao nhất là cấp 1 nên nó là là một phương trình vi phân cấp 1.

(b) Phương trình biên độ chuyển động của con lắc lò xo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

$x = x(t)$ là ẩn hàm, t là biến độc lập, k là hằng số. Phương trình này chứa cấp đạo hàm cao nhất là cấp 2, nên nó là một phương trình vi phân cấp 2.

Ví dụ: Chỉ ra rằng bất kỳ phần tử của họ hàm $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ là một nghiệm của phương trình vi phân $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

Giải: Chúng ta sử dụng quy tắc thương đối với đạo hàm để biểu diễn y

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(ce^t)}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}.$$

Thay y vào vế phải của phương trình vi phân trở thành

$$\frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}.$$

Ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ: Tìm một nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Ví dụ: Tìm một nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Giải: Từ Ví dụ trên, thế giá trị $t = 0$ và $y = 2$ vào công thức $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ ta nhận được

$$2 = \frac{1+ce^0}{1-ce^0} = \frac{1+c}{1-c} \Rightarrow c = \frac{1}{3}.$$

Như vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$y = \frac{1+\frac{1}{3}e^t}{1-\frac{1}{3}e^t} = \frac{3+e^t}{3-e^t}.$$

2 Trường có hướng.

2 Trường có hướng.

Xét phương trình vi phân bậc nhất dạng

$$y' = F(x, y),$$

với $F(x, y)$ là một biểu diễn nào đó theo x và y.

2 Trường có hướng.

Xét phương trình vi phân bậc nhất dạng

$$y' = F(x, y),$$

với $F(x, y)$ là một biểu diễn nào đó theo x và y.

Phương trình vi phân này chỉ ra rằng hệ số góc của đường cong nghiệm tại (x, y) là $F(x, y)$.

2 Trường có hướng.

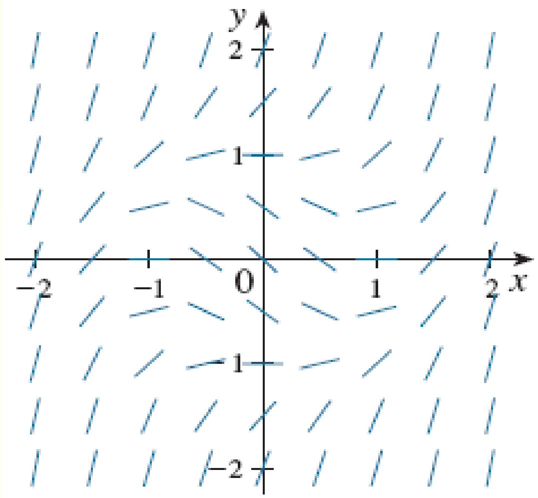
Xét phương trình vi phân bậc nhất dạng

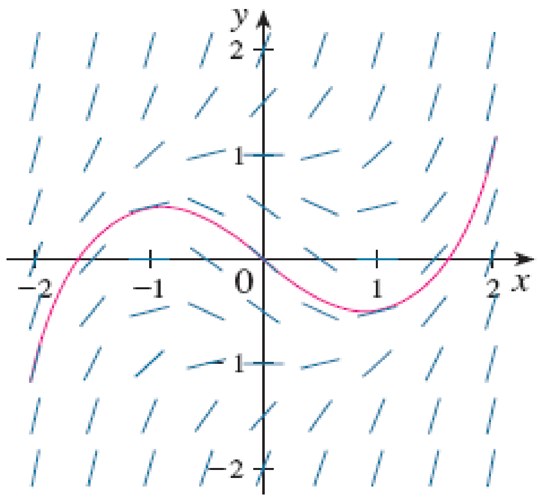
$$y' = F(x, y),$$

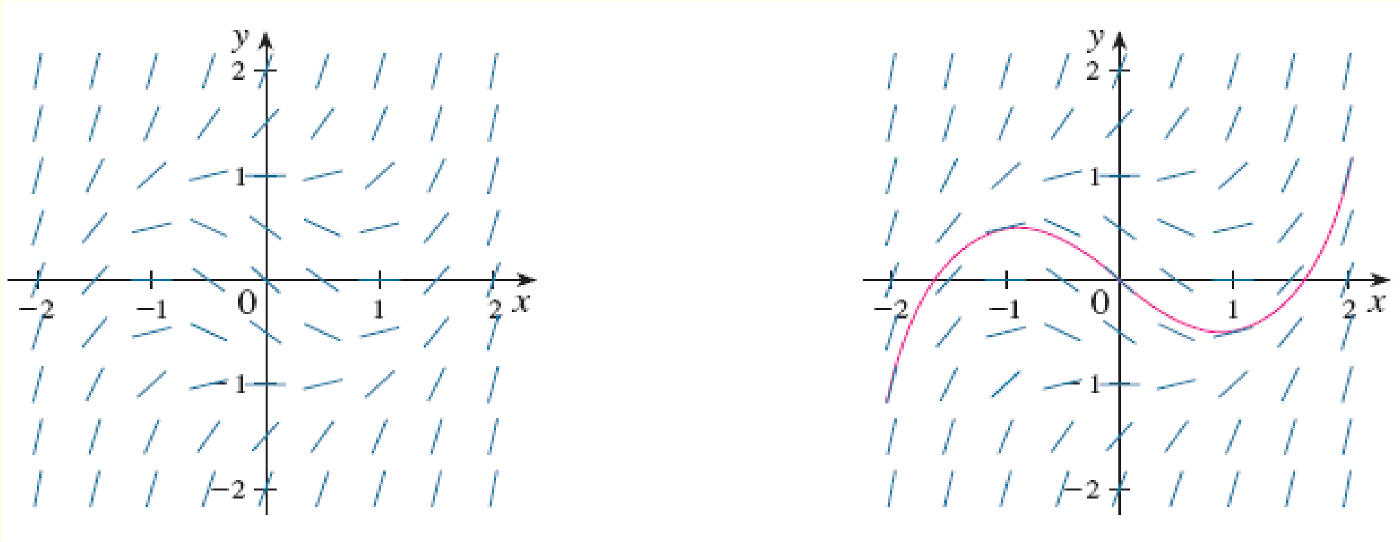
với $F(x, y)$ là một biểu diễn nào đó theo x và y.

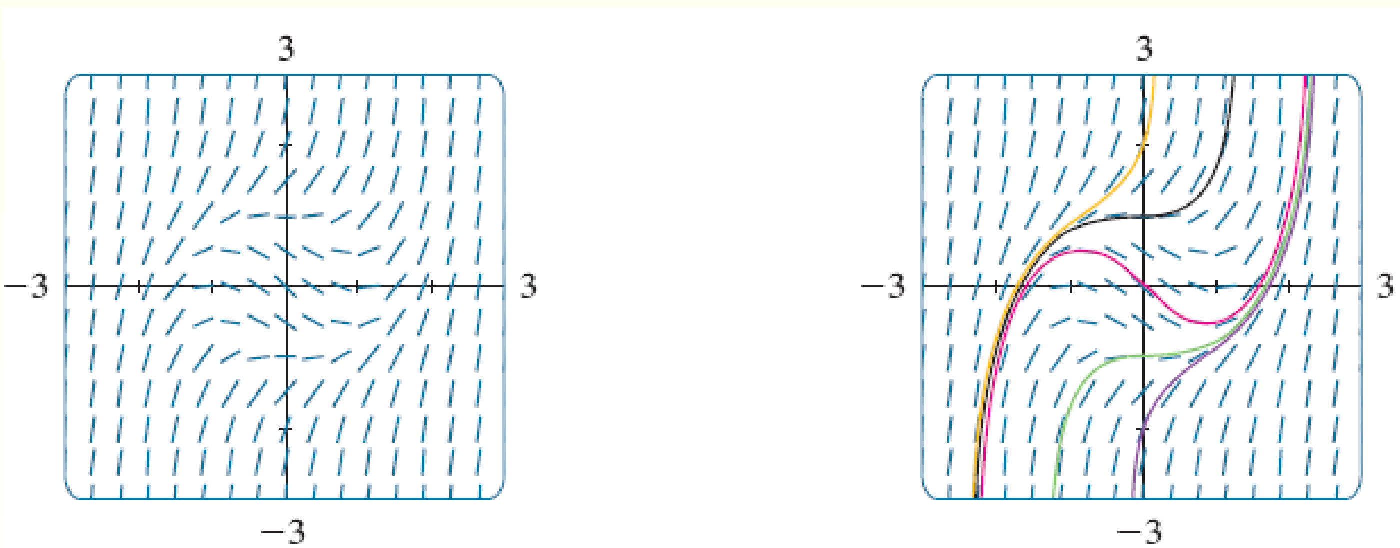
Phương trình vi phân này chỉ ra rằng hệ số góc của đường cong nghiệm tại (x, y) là $F(x, y)$.

Nếu chúng ta vẽ các đoạn thẳng nhỏ với độ dốc (hệ số góc) $F(x, y)$ tại các điểm (x, y), kết quả nhận được được gọi là một trường có hướng (hoặc trường hệ số góc) của phương trình $y' = F(x, y)$.


y
2
1
0
−2
−1
1
2
x
−1
−2


y
2
1
0
−2
−1
1
2
x
−1
−2


y
2
1
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2


3
−3
3
−3

3 Phương pháp Euler (Phương pháp số).

3 Phương pháp Euler (Phương pháp số).

Xét bài toán giá trị ban đầu bậc nhất tổng quát

$$y' = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

3 Phương pháp Euler (Phương pháp số).

Xét bài toán giá trị ban đầu bậc nhất tổng quát

$$y' = F(x, y), \qquad y\left(x_0\right) = y_0.$$

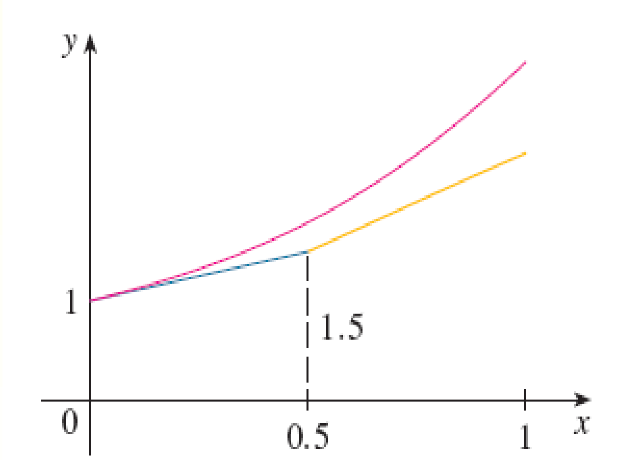
Mục đích của chúng ta là tìm một giá trị xấp xỉ đối với nghiệm tại các phần từ cách đều nhau $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots$, ở đây h là được gọi là bề rộng của bước.

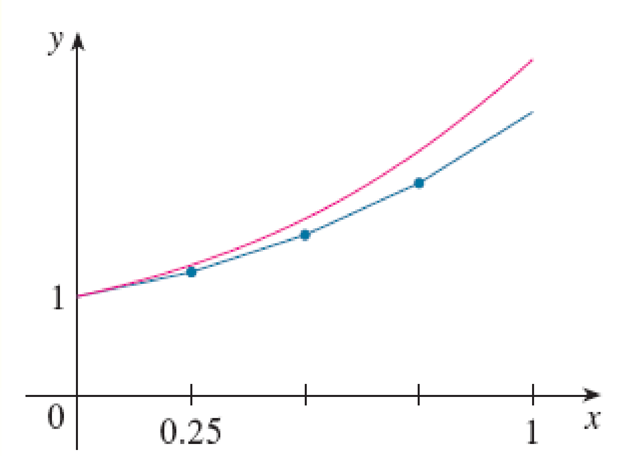
3 Phương pháp Euler (Phương pháp số).

Xét bài toán giá trị ban đầu bậc nhất tổng quát

$$y' = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Mục đích của chúng ta là tìm một giá trị xấp xỉ đối với nghiệm tại các phần từ cách đều nhau $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ...,$ ở đây h là được gọi là bề rộng của bước.





Phương pháp Euler - Xấp xỉ nghiệm

Phương pháp Euler - Xấp xỉ nghiệm

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

Phương pháp Euler - Xấp xỉ nghiệm

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

Tương tự: $y_2 = y_1 + hF\left(x_1, y_1\right).$

Phương pháp Euler - Xấp xỉ nghiệm

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

Tương tự: $y_2 = y_1 + hF\left(x_1, y_1\right).$

Tổng quát

$$y_n = y_{n-1} + hF\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right).$$

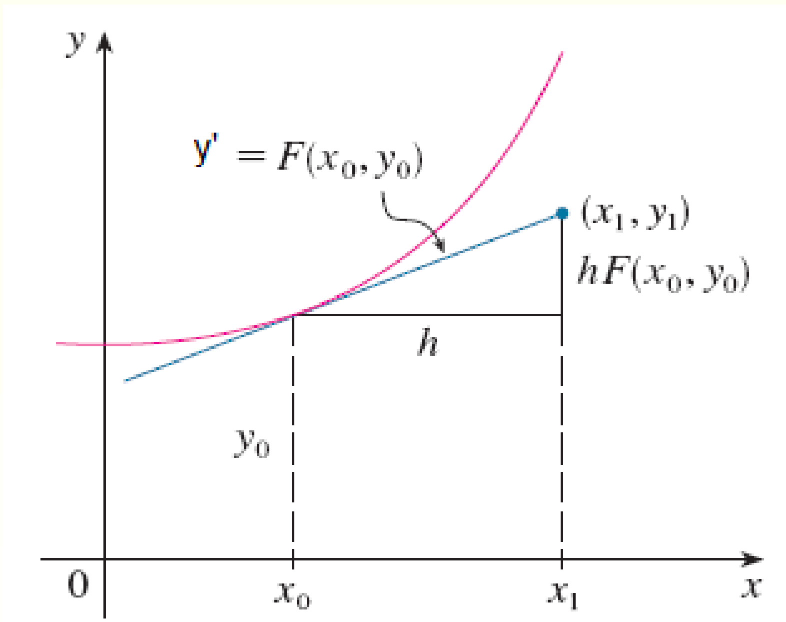
Phương pháp Euler - Xấp xỉ nghiệm

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

Tương tự: $y_2 = y_1 + hF\left(x_1, y_1\right).$

Tổng quát

$$y_n = y_{n-1} + hF\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right).$$



Ví dụ: Sử dụng phương pháp Euler với bề rộng bước 0.1 để xây dựng một bảng các giá trị xấp xỉ đối với nghiệm $y(0,3)$ của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = x + y \qquad y\,(0) = 1.$$

Giải: Chúng ta cho $h = 0.1, x_0 = 0, y_0 = 1$và $F\,(x, y) = x + y$. Khi đó ta có

$$y_1 = y_0 + hF\,(x_0, y_0) = 1 + 0.1\,(0 + 1) = 1.1$$
$$y_2 = y_1 + hF\,(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1\,(0.1 + 1.1) = 1.22$$
$$y_3 = y_2 + hF\,(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1\,(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Điều này có nghĩa nếu $y(x)$ là nghiệm chính xác thì $y\,(0.3) \approx 1.326$

Tiếp tục tính toán tương tự, chúng ta nhận được các giá trị trong bảng

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.326000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528000	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

4 Phương trình tách biến.

4 Phương trình tách biến.

Phương trình tách biến là phương trình có dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{4.1}$$

trong đó M, N là các hàm liên tục trên $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

4 Phương trình tách biến.

Phương trình tách biến là phương trình có dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{4.1}$$

trong đó M, N là các hàm liên tục trên $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}(4.1) &\iff d\left[\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy\right] = 0 \\ &\iff \int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = C\end{aligned}$$

với $x_0, x, y_0, y \in (a, b)$ và C là hằng số.

4 Phương trình tách biến.

Phương trình tách biến là phương trình có dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{4.1}$$

trong đó M, N là các hàm liên tục trên $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}(4.1) &\iff d\left[\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy\right] = 0 \\ &\iff \int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = C\end{aligned}$$

với $x_0, x, y_0, y \in (a, b)$ và C là hằng số.

Vậy nghiệm tổng quát của (4.1) là $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

Ví dụ: (a) Giải phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$.

(b) Tìm nghiệm của phương trình này thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Ví dụ: (a) Giải phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$.
(b) Tìm nghiệm của phương trình này thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Giải: (a) Với điều kiện $y \neq 0$ phương trình đã cho được viết lại

$$y^2 dy = x^2 dx.$$

Tích phân tổng quát (nghiệm tổng quát) của phương trình

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3 = C,$$

với C là hằng số.
(b) Thay $x = 0$ và $y = 2$ vào công thức nghiệm tổng quát ta nhận được $C = \frac{8}{3}$. Vậy nghiệm cần tìm là $y^3 - x^3 = 8$.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y}$.

Giải: Với giả thiết $2y + \cos y \neq 0$ phương trình được viết lại

$$(2y + \cos y)dy = 6x^3dy.$$

Nghiệm tổng quát (tích phân tổng quát của phương trình) được xác định

$$\int (2y + \cos y)dy = \int 6x^2dx \Leftrightarrow y^2 + \sin y - 2x^3 = C,$$

với C là hằng số.

5 Một số ứng dụng của phương trình tách biến.

5.1 Quỹ đạo trực giao.

5 Một số ứng dụng của phương trình tách biến.

5.1 Quỹ đạo trực giao.