TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Trong mục này chúng ta sẽ định nghĩa một tích phân mà nó tương tự như tích phân một lớp, chỉ có một sự khác biệt nhỏ: thay vì trong tích phân một lớp chúng ta xét tích phân trên một khoảng $[a,b]$ thì trong tích phân này chúng ta xét tích phân trên một đường cong C.

Tích phân mà chúng ta đề cập ở trên được gọi là tích phân đường.

1. Tích phân đường trong mặt phẳng

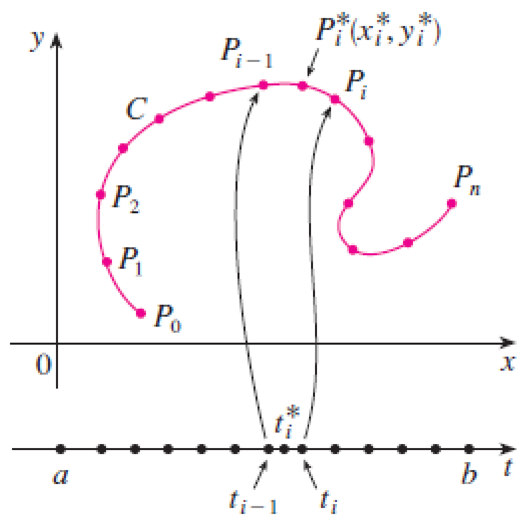
Cho một đường cong phẳng C cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b.$$

Nói cách khác, đường cong phẳng C cho bởi phương trình vectơ:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathrm{i} + y(t)\mathrm{j}$$

Chúng ta giả sử thêm rằng C là một đường cong trơn.



+. Chia khoảng tham số $[a,b]$ thành n khoảng nhỏ $[t_{i-1}, t_i]$ có độ dài bằng nhau, và gọi $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$. Khi ấy điểm $P(x_i, y_i)$ chia đường cong C thành n đoạn cong nhỏ với độ dài lần lượt là: Δs_1, Δs_2, Δs_3, ..., Δs_n (xem hình vẽ trên)

+. Trên đoạn cong nhỏ thứ i ta chọn một điểm bất kỳ $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ (tương ứng ta có điểm t_i^* trong $[t_{i-1}, t_i]$).

+. Nếu f là một hàm hai biến có miền xác định chứa đường cong C thì ta có thể lập được biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

Biểu thức ở trên tương tự như Tổng Riemann mà chúng ta đã biết trong tích phân một lớp.

+. Nếu $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i\right]$ tồn tại thì giới hạn này được gọi là Tích phân Đường của f dọc theo C. Ký hiệu là: $\int_C f(x,y)ds$.

Như vậy ta có: $\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i\right]$

* Trong tích phân một lớp, chúng ta đã biết được độ dài của đường cong C được xác định bởi biểu thức:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Do đó, nếu f là một hàm liên tục thì giới hạn trong định nghĩa trên sẽ tồn tại và được tính bởi công thức sau:

$$\int_C f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

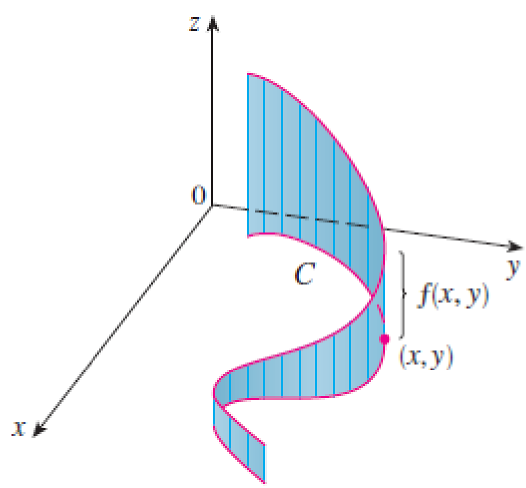
Giá trị của tích phân trên không phụ thuộc vào tham số của đường cong nhưng phải thỏa mãn điều kiện rằng vết của đường cong chỉ tạo nên một lần khi giá trị tham số t tăng từ a đến b.

* Nếu C là một đoạn thẳng nối các điểm $(a,0)$ và $(b,0)$, thì bằng cách dùng x làm tham số chúng ta có thể viết lại phương trình tham số của C như sau: $x = x$, $y = 0$ và $a \le x \le b$. Khi ấy công thức tích phân đường ở trên trở thành:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, 0)\, dx$$

Như thế trong trường hợp này tích phân đường quy về tích phân một lớp mà chúng ta đã biết.

* Trong trường hợp $f(x,y) \ge 0$, thì tích phân đường $\int\limits_C f(x,y)ds$ biểu diễn diện tích của một phía của "hàng rào" hoặc "màn cửa". Trong đó C là đáy và $f(x,y)$ chính là độ cao (xem hình vẽ minh họa dưới đây)



Ví dụ 1: Tính tích phân $\int\limits_C (2 + x^2 y)ds$ với C là nửa trên đường tròn bán kính bằng 1 có phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

Giải.

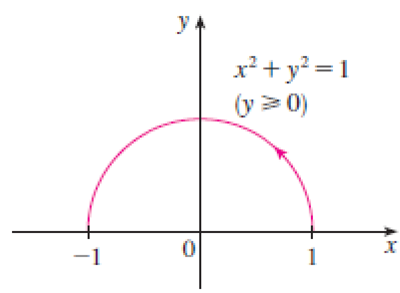
Đặt $x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \le t \le \pi$

$$\int_C (2 + x^2 y)ds = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$$

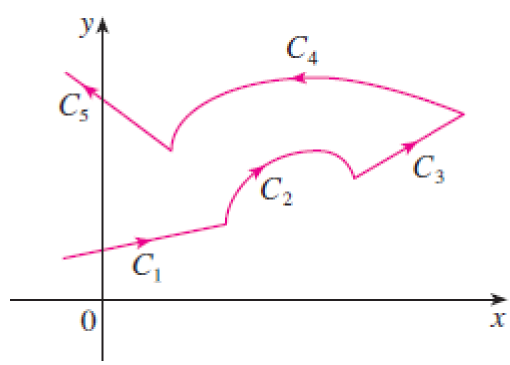
$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t) dt$$

$$= [2t - \frac{\cos^3 t}{3}]_0^{\pi} = 2\pi + \frac{2}{3}$$



* Chú ý: Nếu C là một đường cong trơn từng mảnh, có nghĩa C là hợp của một số hữu hạn các đường cong trơn C_1, C_2, ..., C_n (xem hình vẽ minh họa dưới đây)

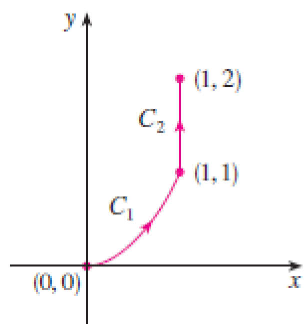


Khi đó ta có được:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

Ví dụ: Tính tích phân $\int_C 2x\,ds$ với C chứa cung C_1 của parabol $y = x^2$ từ (0;0) đến A(1;1) sau đó thẳng đứng theo C_2 từ (1;1) đến (1;2)

Giải.



$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_1^0 2x\sqrt{(\frac{dx}{dx})^2 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_1^0 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_2^1 2(1)\sqrt{(\frac{dx}{dy})^2 + (\frac{dy}{dy})^2}\,dy = \int_2^1 2\,dy = 2$$

$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$$

* Thể hiện Vật Lý của tích phân đường phụ thuộc vào thể hiện Vật Lý của hàm f. Chẳng hạn, giả sử $\rho(x, y)$ là mật độ tuyến tính tại điểm (x, y) của một dây kim loại có dạng như đường cong C. Khi đó tổng khối lượng m của dây kim loại được tính bởi công thức:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\, ds$$

Khi ấy tọa độ trọng tâm của dây kim loại được xác định bởi:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y)\, ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y)\, ds$$

* Trong định nghĩa $\int\limits_C f(x,y)ds = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i\right]$, nếu ta thay Δs_i bằng $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ hoặc $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ thì ta sẽ nhận được hai tích phân đường khác. Chúng được gọi là Tích phân Đường của f dọc theo C đối với x và y:

$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

Để phân biệt với 2 tích phân trên, chúng ta gọi $\int\limits_C f(x,y)ds$ là tích phân đường đối với độ dài cung.

Ta có được:

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

Khi kết hợp 2 tích phân trên chúng ta có được biểu thức sau đây:

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

2. Tích phân đường trong không gian

Giả sử C là đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b.$$

Cho f là một hàm ba biến liên tục trên miền xác định chứa đường cong C, khi đó chúng ta cũng định nghĩa được tích phân đường của f dọc theo C tương tự như trường hợp C là đường cong phẳng, cụ thể:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

Và chúng ta cũng có được công thức tính trong trường hợp này là:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

* Nhận xét:

(i). Vế phải của cả hai công thức tính tích phân đường (trong mặt phẳng và trong không gian) chúng ta có thể kết hợp thành một công thức theo hàm vectơ như sau:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt$$

Với trường hợp $f = 1$ chúng ta nhận được:

$$\int_C ds = \int_a^b |\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt = L$$

Trong đó L là độ dài của đường cong C.

(ii). Ta có thể xác định được:

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z)\, dz &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt\end{aligned}$$

Như thế chúng ta có thể viết lại biểu thức tích phân đường như sau:

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

Ví dụ: Tính $\int_C y\sin z\,ds$ với C là đường xoắn ốc được cho bởi

$x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$

Giải.

$$\begin{aligned}
&\int_C y\sin z\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t)\sin t\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[t - \frac{1}{2}\sin 2t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Tính tích phân đường với C là đường cong đã được cho

(a). $\int_C y\,ds$, với $C: x = t^2,\ y = t,\ 0 \le t \le 2$.

(b). $\int_C (y/x)\,ds$, với $C: x = t^4,\ y = t^3,\ \frac{1}{2} \le t \le 1$.

(c). $\int_C xy^4\,ds$, với C là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

(d). $\int_C xy\,dx + (x - y)\,dy$, với C gồm 2 đoạn thẳng từ $(0,0)$ đến $(2,0)$ và từ $(2,0)$ đến $(3,2)$.

(e). $\int_C \sin x dx + \cos y dy$ với C gồm nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ từ $(1,0)$ đến $(-1,0)$ và đoạn thẳng nối $(-1,0)$ với $(-2,3)$.

(f). $\int_C zdx + xdy + ydz$, với $C: x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^2,\ 0 \le t \le 1$.

(g). $\int_C zdx + xdy + ydz$, với C là đường gồm 2 đoạn thẳng từ $(1,0,1)$ đến $(2,3,1)$ và từ $(2,3,1)$ đến $(2,5,2)$.

2. Tính tích phân đường $\int_C F.dr$ với C được cho bởi hàm vectơ $r(t)$.

(a). $F(x,y) = x^2y^3\mathrm{i} - y\sqrt{x}\mathrm{j}$	$r(t) = t^2\mathrm{i} - t^3\mathrm{j}$	$0 \le t \le 1$
(b). $F(x,y,z) = yz\mathrm{i} + xz\mathrm{j} + xy\mathrm{k}$	$r(t) = t\mathrm{i} + t^2\mathrm{j} + t^3\mathrm{k}$	$0 \le t \le 2$
(c). $F(x,y,z) = \sin x\mathrm{i} + \cos y\mathrm{j} + xz\mathrm{k}$	$r(t) = t^3\mathrm{i} - t^2\mathrm{j} + t\mathrm{k}$	$0 \le t \le 1$
(d). $F(x,y,z) = z\mathrm{i} + y\mathrm{j} - x\mathrm{k}$	$r(t) = t\mathrm{i} + \sin t\mathrm{j} + \cos t\mathrm{k}$	$0 \le t \le \pi$

3. Dùng định lý Green để tính tích phân đường dọc theo đường cong được định hướng dương cho trước.

(a). $\int_C e^y dx + 2xe^y dy$, C là hình vuông có các cạnh bên là $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

(b). $\int_C x^2y^2dx + 4xy^3dy$, C là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(1,3)$, $(0,3)$.

(c). $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, C là biên của miền bị chắn bởi các parabol $y = x^2$, $x = y^2$.

(d). $\int_C xe^{-2x}dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, C là biên của miền nằm giữa các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

(e). $\int_C y^3dx - x^3dy$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

(f). $\int_C \sin ydx + x\cos ydy$, C là elip $x^2 + xy + y^2 = 1$.