

# TÍCH PHÂN HAI LỚP

1. (a) Ước tính thể tích của hình khối nằm dưới bề mặt  $z = xy$  và nằm trên hình chữ nhật

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$$

Sử dụng một tổng Riemann với  $m = 3, n = 2$ , và chọn điểm mẫu là điểm nằm ở góc phía trên bên phải mỗi hình vuông.

(b) Sử dụng Quy tắc trung điểm để ước tính thể tích của hình khối trong câu (a).

2. Nếu  $R = [0, 4] \times [-1, 2]$ , hãy sử dụng một tổng Riemann với  $m = 2, n = 3$  để ước tính giá trị của  $\iint_R (1 - xy^2) dA$ . Chọn các điểm mẫu nằm ở (a) các góc phía dưới bên phải và (b) các góc phía trên bên trái của các hình chữ nhật.

3. (a) Sử dụng một tổng Riemann với  $m = n = 2$  để ước tính giá trị của  $\iint_R xe^{-xy} dA$ , trong đó  $R = [0, 2] \times [0, 1]$ . Chọn các điểm mẫu nằm ở các góc phía trên bên phải.

(b) Sử dụng Quy tắc trung điểm để ước tính tích phân ở câu (a).

4. (a) Ước tính thể tích của hình khối nằm dưới bề mặt  $z = 1 + x^2 + 3y$  và nằm trên hình chữ nhật  $R = [1, 2] \times [0, 3]$ . Sử dụng một tổng Riemann với  $m = n = 2$  và chọn các điểm mẫu nằm ở các góc phía dưới bên trái.

(b) Sử dụng Quy tắc trung điểm để ước tính thể tích ở câu (a).

5. Cho bảng các giá trị của một hàm số  $f(x, y)$  xác định trên

$$R = [0, 4] \times [2, 4].$$

(a) Ước tính  $\iint_R f(x, y) dA$  bằng cách sử dụng Quy tắc trung điểm với  $m = n = 2$ .

- (b) Ước tính tích phân hai lớp với  $m = n = 4$  bằng cách chọn các điểm mẫu là các điểm gần gốc tọa độ nhất.

$x \backslash y$	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0	-3	-5	-6	-4	-1
1	-1	-2	-3	-1	1
2	1	0	-1	1	4
3	2	2	1	3	7
4	3	4	2	5	9

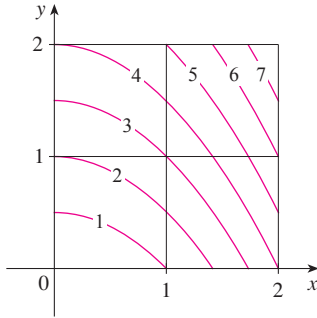
6. Người ta đổ nước vào một hồ bơi có chiều dài 30ft và chiều rộng 20 ft, sau đó đo độ sâu mực nước của hồ theo khoảng cách 5ft/lần, bắt đầu từ một góc của hồ, và ghi lại các giá trị vào bảng sau. Hãy ước tính thể tích của nước trong hồ bơi.

	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

7. Gọi  $V$  là thể tích của hình khối nằm dưới đồ thị của  $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$  và nằm trên hình chữ nhật được cho bởi  $2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 6$ . Chúng ta sử dụng các đường thẳng  $x = 3$  và  $y = 4$  để

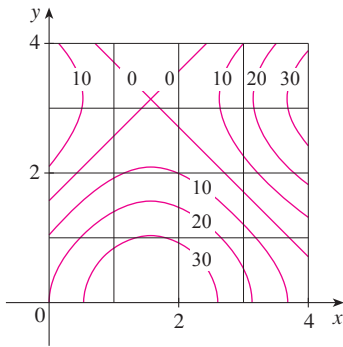
chia  $R$  thành các hình chữ nhật con. Gọi  $L$  và  $U$  là các tổng Riemann được tính bằng cách sử dụng các điểm mẫu nằm ở góc phía dưới bên trái và góc phía trên bên phải. Không cần tính các số  $V$ ,  $L$  và  $U$ , hãy sắp xếp chúng theo trật tự tăng dần và đưa ra lý do giải thích cách sắp xếp đó của bạn.

8. Hình dưới đây minh họa các đường mức của một hàm số  $f$  trong hình vuông  $R = [0, 2] \times [0, 2]$ . Hãy sử dụng Quy tắc trung điểm với  $m = n = 2$  để ước tính  $\iint_R f(x, y) dA$ . Bạn làm thế nào để cải thiện phép ước tính này?

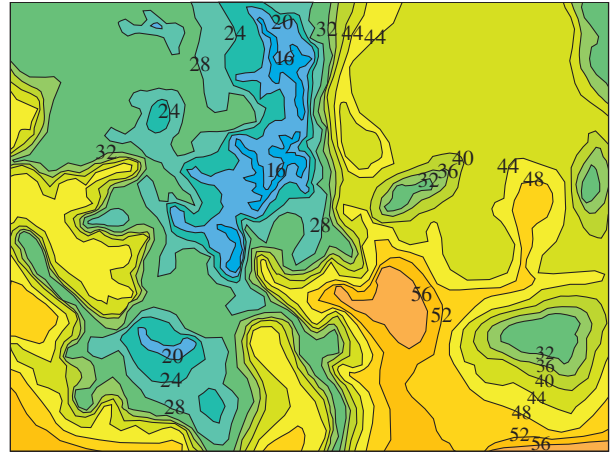


$$R = [0, 4] \times [0, 4].$$

9. Cho bản đồ đường mức của một hàm số  $f$  trên hình vuông  $R = [0, 4]$  và  $[0, 4]$ .
- (a) Sử dụng Quy tắc trung điểm với  $m = n = 2$  để ước tính giá trị của  $\iint_R f(x, y) dA$ .
- (b) Ước tính giá trị trung bình của  $t$ .



10. Bản đồ đường mức biểu diễn nhiệt độ (tính bằng độ Fahrenheit) lúc 4 giờ chiều ngày 26/12/2007 ở bang Colorado. (Bang có kích thước 388 dặm từ tây sang đông và 276 dặm từ nam lên bắc.) Sử dụng Quy tắc trung điểm với  $m = n = 4$  để ước tính nhiệt độ trung bình ở Colorado tại thời điểm đó.



- 11–13 Ước tính tích phân hai lớp sau đây bằng cách trước tiên xác định nó là thể tích của một hình khối.

11.  $\iint_R 3 dA$ ,  $R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 6\}$

12.  $\iint_R (5 - x) dA$ ,  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$

13.  $\iint_R (4 - 2y) dA$ ,  $R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. Tích phân  $\iint_R \sqrt{9 - y^2} dA$ , trong đó  $R = [0, 4] \times [0, 2]$  biểu diễn thể tích của một hình khối. Vẽ hình khối đó.

15. Sử dụng một máy tính/máy vi tính lập trình được (hoặc lệnh tổng trên CAS) để ước tính

$$\iint_R \sqrt{1 + xe^{-y}} dA$$

trong đó  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Áp dụng Quy tắc trung điểm với số lượng các hình vuông có kích thước bằng nhau lần lượt là: 1, 4, 16, 64, 256, và 1024.

16. Làm lại Bài tập 15 cho tích phân  $\iint_R \sin(x + \sqrt{y}) dA$ .

17. Nếu  $f$  là một hàm hằng,  $f(x, y) = k$ , và  $R = [a, b] \times [c, d]$ , hãy chứng minh rằng

$$\iint_R k dA = k(b - a)(d - c)$$

18. Sử dụng kết quả của Bài tập 17 để chứng minh rằng

$$0 \leq \iint_R \sin \pi x \cos \pi y dA \leq \frac{1}{32}$$

trong đó  $R = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ .