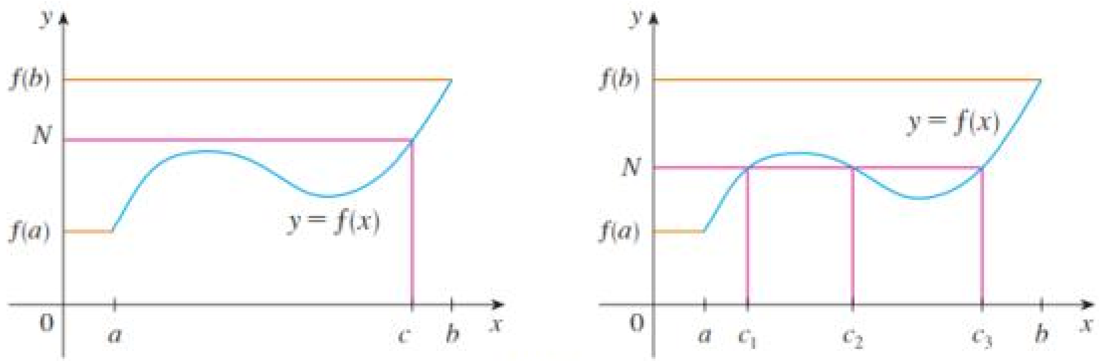
Định lý giá trị trung gian:

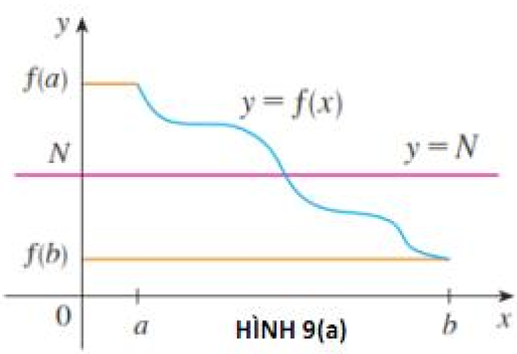
Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a, b] và gọi N là một số nằm giữa f(a) và f(b), trong đó $f(a) \neq f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho f(c)= N.

Định lí này nói rằng một hàm số liên tục nhận mọi giá trị trung gian giữa hai giá trị f(a) và f(b) của hàm số . Hình 8 bên dưới minh họa tính chất này. Nhận xét rằng giá trị N có thể nhận một lần (a) hay hai lần (b).

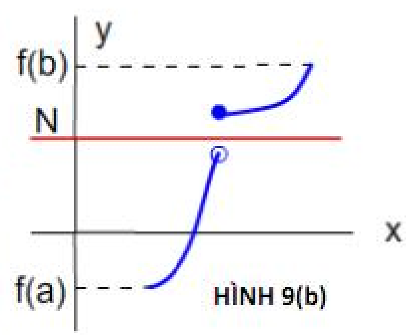


HÌNH 8

(a) (b)



Vì đồ thị của hàm số liên tục là một đường liền lạc, không có "ổ gà", không đứt đoạn, nên định lí này có thể cảm nhận là đúng. Ý nghĩa hình học của định lí này là một đường thẳng nằm ngang bất kì y = N nằm giữa hai đường thẳng y = f(a) và y = f(b) chắc chắn sẽ cắt đồ thị tại ít nhất một điểm (Hình9(a). Điều này không luôn đúng trong đồ thị một hàm số không liên tục (Hình 9(b)).



Ví dụ:

Chứng tỏ rằng phương trình

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

có nghiệm trong khoảng (1, 2).

GIẢI Cho $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Ta tìm một nghiệm của phương trình đã cho , tức tìm một số c giữa 1 và 2 sao cho f(c) = 0. Do đó ta lấy a = 1, b = 2 và N = 0 trong Định lí 10. Ta có

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$
$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Như vậy f(1) < 0 < f(2); nghĩa là N = 0 là một số nằm giữa f(1) và f(2). Mà f là hàm số liên tục vì f là một đa thức, Định Lý Giá Trị Trung Gian nói rằng tồn tại số c giữa 1 và 2 sao cho f(c) = 0. Nói cách khác phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong khoảng (1, 2).